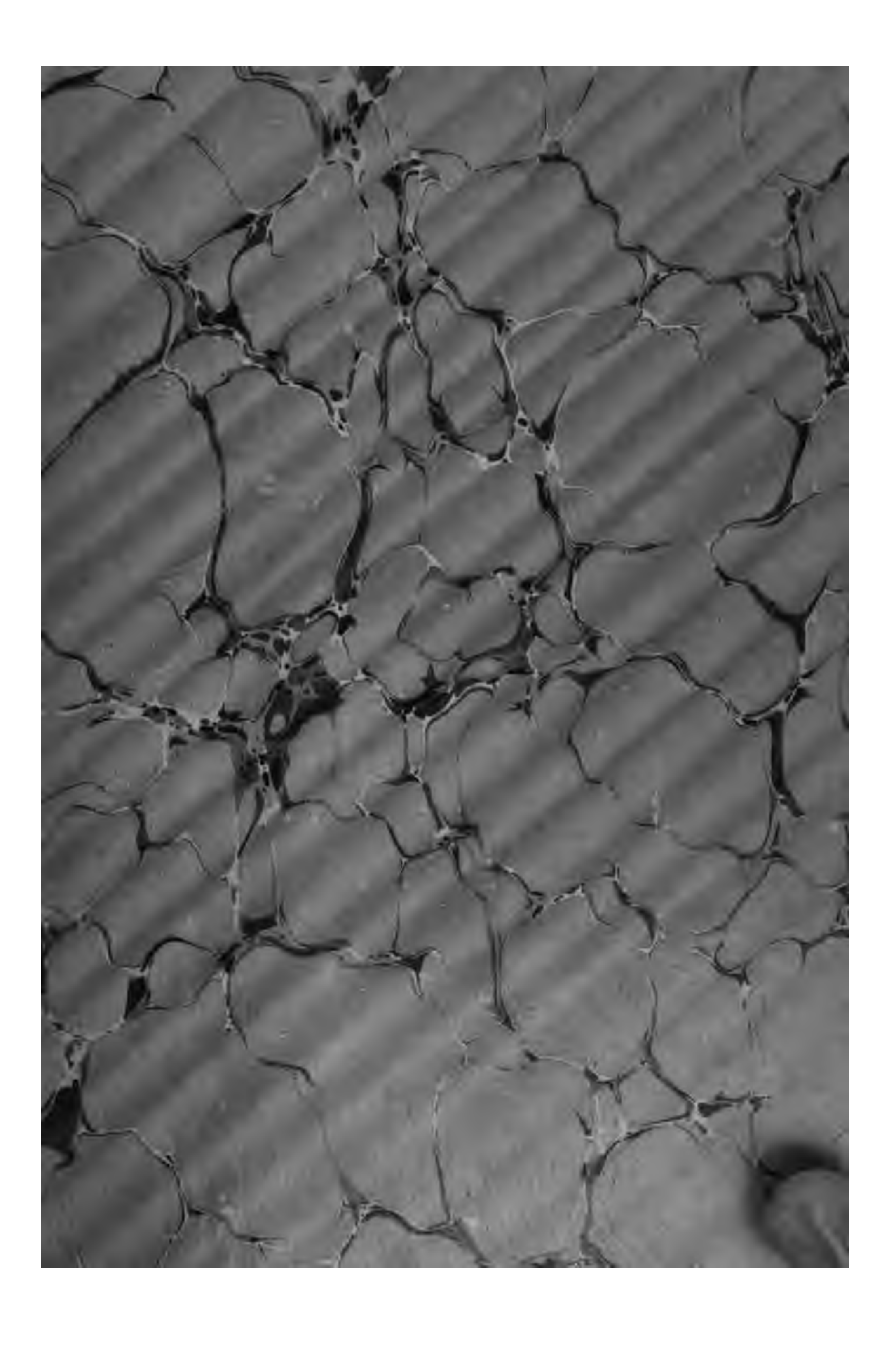



LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES



RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES

PAR

M. ÉDOUARD LUCAS

« Je n'écris pas principalement pour ceux qui sont du tout ignorants, et qui sont si hébétés et tardifs à comprendre les propriétés des nombres. »

(BACHET DE MÉZIRIAC.)

DEUXIÈME ÉDITION

II

Qui perd gagne. — Les Dominos.
Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête.
Les Jeux de Demoiselles.
Le Jeu icosien d'Hamilton.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1896

RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

Je n'écris pas principalement pour ceux qui sont du tout ignorants, et qui sont si hébétés et tardifs à comprendre les propriétés des nombres.

(BACHET DE MÉZIRIAC.)

DEUXIÈME ÉDITION.

II

Qui perd gagne. — Les Dominos.
Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête.
Les Jeux de Demoiselles.
Le Jeu icosien d'Hamilton.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1896



PREMIÈRE RÉCRÉATION.

—

AU JEU DE DAMES, QUI PERD GAGNE.

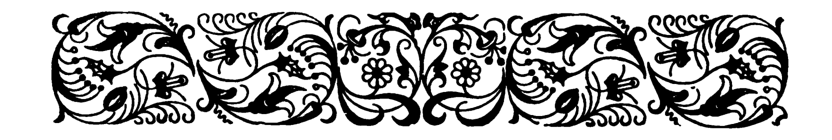
A Monsieur François Viette, député du Doubs.

« Dans les Mathématiques, la censure et la critique ne peuvent être permises à tout le monde; les discours des rhéteurs et les défenses des avocats n'y valent rien. »

(FRANÇOIS VIÉTE, seigneur de la Bigotière. — *In artem analyticem Isagoge.*)

« Qu'il me soit permis d'avertir les joueurs de mener tout doucement les dames; si l'on use de modération et de douceur envers des dames de bois, qui sont très insensibles, l'on pourra par nature ou par habitude parler, traiter et se comporter modestement avec les personnes et les dames vivantes, qui ne demandent qu'amour et douceur dans leurs fréquentations. »

(*La Maison des jeux académiques.*)



PREMIÈRE RÉCRÉATION.

—

AU JEU DE DAMES, QUI PERD GAGNE.

PRÉLIMINAIRES.

EST-IL possible de gagner toujours au jeu de dames ou au jeu d'échecs, en commençant le premier? La question est fort difficile à résoudre; cependant il ne paraît pas douteux que l'un des deux joueurs, au début de la partie, pourrait déterminer la fin et s'assurer la victoire, s'il était parfaitement habile. Il n'est pas impossible de trouver une méthode infaillible pour gagner soit aux dames, soit aux échecs; néanmoins, il n'est pas probable qu'on la trouve de longtemps, parce qu'elle dépend, surtout aux échecs, d'un trop grand nombre de combinaisons.

« Je prends cette occasion de proclamer que la haute puissance de la réflexion est bien plus activement et plus profitablement exploitée par le modeste jeu de dames, que par toute la laborieuse fertilité des échecs. Dans ce dernier jeu, où les pièces sont douées de mouvements divers et bizarres, et représentent des valeurs

diverses et variées, la complexité est prise — erreur fort commune — pour de la profondeur. L'attention y est puissamment mise en jeu ; si elle se relâche d'un instant, on commet une erreur, d'où il résulte une perte ou une défaite. Comme les mouvements possibles sont, non seulement variés, mais inégaux en puissance, les chances de pareilles erreurs sont très multipliées; et, dans neuf cas sur dix, c'est le joueur le plus attentif qui gagne, et non pas le plus habile. Dans les dames, au contraire, où le mouvement est simple dans son espèce et ne subit que peu de variations, les probabilités d'inadvertance sont beaucoup moindres, et l'attention n'étant pas absolument et entièrement accaparée, tous les avantages remportés par chacun des joueurs ne peuvent l'être que par une perspicacité supérieure.

« Pour laisser là ces abstractions, supposons un jeu de dames où la totalité des pièces soit réduite à quatre dames, et où, naturellement, il n'y ait pas lieu de s'attendre à des étourderies. Il est évident qu'ici la victoire ne peut être décidée — les deux parties étant absolument égales — que par une tactique habile, résultat de quelque puissant effort de l'intellect. Privé des ressources ordinaires, l'analyste entre dans l'esprit de son adversaire, s'identifie avec lui, et souvent découvre d'un seul coup d'œil l'unique moyen — un moyen quelquefois absurdement simple — de l'attirer dans une faute ou de le précipiter dans un faux calcul (1). »

(1) Edgar Poë. — *Histoires extraordinaires. Double assassinat dans la rue Morgue.* Traduction de Ch. Baudelaire.



HISTORIQUE.

Le jeu de dames paraît immémorial dans l'extrême Orient, et en particulier dans l'ancienne Égypte. On le trouve représenté dans les tombeaux de l'ancienne monarchie, à Saqqarah; il constituait déjà sous la cinquième dynastie un des passe-temps du grand seigneur. Une caricature antique conservée au *British Museum*, représente un lion et une chèvre jouant aux dames. Le musée du Louvre possède deux damiers de l'époque pharaonique.

Suivant Platon, c'est Thot ou Hermès qui inventa le jeu de dames. Ce dieu avait joué avec la Lune ou Séléné; ayant gagné la partie, il obtint de la Lune cinq jours qu'il ajouta à l'année de 360 jours; ces cinq jours connus sous la désignation de *Heru,* les *Epagomènes* des Grecs, ont ainsi complété l'année vague. Suivant d'autres, c'est Palamède qui inventa, en Aulide, le jeu de dames. La *Pettie* des Grecs offre avec ce jeu cette différence qu'une pièce était en prise quand elle se trouvait, non pas entre une pièce ennemie et une case vide, mais entre deux pièces ennemies. On connaît le vers d'Homère ([1]) nous montrant les prétendants de Pénélope, assis sur les peaux des bœufs qu'ils avaient tués eux-mêmes, devant les portes du palais d'Ulysse, charmant leurs loisirs avec des *Pessos*. Le *Diagrammisma* des Grecs et le *Ludus latrunculorum* des Romains sont probablement des transformations de la Pettie. Le mot *Latrunculus* désignait un jeton que l'on appelait aussi *Miles* ou *Hostis,* car on pouvait dire que le jeu représentait une troupe de brigands ou de soldats engagés dans l'attaque ou la défense d'une position

([1]) *Odyssée,* I, 107.

fortifiée [1]. On distinguait les pièces des deux adversaires par la différence de leur couleur; dans l'un des camps elles étaient noires; dans l'autre, rouges ou blanches. Les *Latrones* étaient en bois, en métal, en verre, en ivoire, etc., et pouvaient être déplacés sur des lignes tracées sur une table. Le talent était d'enfermer une des pièces de son adversaire entre deux des siennes, auquel cas elle était prise. La table étant presque toujours représentée de profil, dans les ouvrages des artistes égyptiens et des artistes grecs, on ne sait pas encore exactement comment elle était divisée.

Pendant le moyen âge, ce jeu eut une vogue immense en Europe; on l'appelait alors *Jeu des tables*. Le jeu de dames *à la française* existait déjà au quinzième siècle, et peut-être avant.

Quant aux dames dites *à la polonaise*, elles auraient été, d'après La Condamine, inventées à Paris par un officier du Régent qui jouait habituellement avec un Polonais. Elles auraient fait leur première apparition en 1723, dans un café établi à l'hôtel de Soissons.



LE DAMIER POLONAIS

Le *Damier ordinaire*, ou *Damier à la polonaise*, est un carré divisé en cent *cases* ou *cellules*, alternativement blanches et noires. La grande diagonale des cases blanches est appelée *polonaise;* on dispose toujours le damier de telle sorte que cette diagonale soit à la gauche de chacun des deux joueurs. On joue habituellement sur les cases blanches, pour cette raison que la

[1] Ovide. — *Ars amandi*, III, 357. — Martial, VII, 72; XIV, 20.

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES.

trouve cette case ; le second chiffre, nommé ***ordonnée*** et placé en exposant, indique le rang compté des noirs vers les blancs, et de 0 à 9, de la ligne horizontale qui contient cette même case.

Fig. 1.

Côté des blancs.

	1^9		3^9		5^9		7^9		9^9
0^8		2^8		4^8		6^8		8^8	
	1^7		3^7		5^7		7^7		9^7
0^6		2^6		4^6		6^6		8^6	
	1^5		3^5		5^5		7^5		9^5
0^4		2^4		4^4		6^4		8^4	
	1^3		3^3		5^3		7^3		9^3
0^2		2^2		4^2		6^2		8^2	
	1^1		3^1		5^1		7^1		9^1
0^0		2^0		4^0		6^0		8^0	

Côté des noirs.

Notation du damier, d'après Vandermonde.

Pour opérer d'une manière rapide, il est préférable de lire séparément chacun des deux chiffres de la notation ; de cette façon, on se fixe plus facilement dans la mémoire l'ensemble des cases de l'échiquier.

Cette notation que nous avons déjà employée dans la récréation

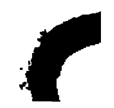
sur le jeu du solitaire présente, dans l'étude du jeu de dames, plusieurs avantages :

1° Elle conserve la place des cases noires. Bien que ces dernières ne soient pas effectivement utiles dans le jeu de dames, puisque le champ de bataille se compose exclusivement des cases blanches, il y a un certain nombre d'autres problèmes dans lesquels elles doivent être employées. En les supposant numérotées en même temps que les cases blanches, il suffit de compter toutes les cellules de 0^0 à 0^9, en augmentant l'exposant, pour la première colonne à gauche ; puis de 1^0 à 1^9, en augmentant l'exposant pour la seconde colonne, et ainsi de suite.

2° Elle donne une notation semblable pour l'échiquier ordinaire de soixante-quatre cases, puisqu'il suffit de supprimer la bande extérieure du damier, c'est-à-dire toutes les cases dont la notation contient l'un des chiffres 0 ou 9. D'ailleurs, nous venons de rappeler que cette notation sert aussi pour les cases des trois solitaires que l'on rencontre le plus habituellement.

3° Pour toute case blanche, les deux chiffres de la notation sont de même parité, c'est-à-dire sont pris en même temps parmi les chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8, ou en même temps parmi les chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9. Au contraire, pour toute case noire, les deux chiffres de la notation sont de parité différente, c'est-à-dire que l'un d'eux est pair, lorsque l'autre est impair. Ainsi, les yeux fermés, il est facile de savoir par la notation d'une case, si celle-ci est blanche ou noire.

On observera que les cases situées dans les diagonales parallèles à la polonaise blanche $0^0 — 9^9$ sont représentées par des nombres qui augmentent continuellement de 1 pour chaque chiffre, en allant des noirs vers les blancs ; et que les cases situées dans les



diagonales parallèles à la polonaise noire 9^0 — 0^9 sont représentées par des nombres qui diminuent continuellement de 1, pendant que l'exposant augmente de 1, en se dirigeant obliquement des noirs vers les blancs, de droite à gauche.



MARCHES ET CONTRE-MARCHES.

Le déplacement ou la marche d'un pion noir se fait en avançant diagonalement soit à droite, soit à gauche, sur la ligne voisine. Par suite, dans ce déplacement, l'ordonnée augmente d'une unité, mais l'abscisse augmente ou diminue de 1, selon que le pion noir s'est dirigé vers la droite ou vers la gauche. Cependant lorsque le pion noir se trouve placé dans la première colonne à gauche ou dans la dernière à droite, il ne peut y avoir qu'un seul déplacement. Dans la marche du pion blanc, l'ordonnée diminue d'une unité, et l'abscisse augmente ou diminue de 1, suivant le sens du déplacement. En outre, on doit observer que le déplacement d'un pion n'est possible qu'à la condition de venir occuper une case vide. S'il en est ainsi, le pion noir situé sur la case p^q peut venir occuper l'une des deux cases $(p \pm 1)^{q+1}$, et le pion blanc situé sur la case p^q peut venir occuper l'une des deux cases $(p \pm 1)^{q-1}$

Lorsqu'un pion noir ou blanc vient se placer sur l'une des cases de la dernière ligne du camp opposé, on le couvre d'un pion de même couleur, et le système de ces deux pions est appelé *dame*. Le mouvement de la dame diffère de celui du pion; la dame peut avancer ou reculer à volonté, par *marche* ou

contre-marche, et franchir diagonalement plusieurs cases. Soit p^q la case occupée par une dame blanche ou noire ; si cette dame est seule sur le damier, elle peut venir occuper, par un seul déplacement, l'une des cases $(p \pm x)^{q \pm x}$, pourvu que les nombres $(p \pm x)$ et $(q \pm x)$ soient compris entre les limites 0 et 9, ou égaux à ces limites. Lorsqu'il existe d'autres pions sur le damier, la dame peut occuper l'une des cases que nous venons d'indiquer, pourvu que les cases placées sur le parcours de la dame soient toutes vides.

HORS DE COMBAT.

La marche du pion ou de la dame diffère de celle que nous venons d'indiquer, lorsque le pion ou la dame prend un ou plusieurs pions de l'ennemi, et les met *hors de combat*, en les retirant du damier.

Dans ce cas, le pion peut avancer ou reculer ; ainsi, en supposant qu'il n'existe sur le damier qu'un pion blanc et un pion noir, le pion placé sur la case 2^6 et qui commence l'attaque, peut s'emparer d'un pion de couleur opposée qui se trouve sur l'une des quatre cases suivantes [1] :

I.	Sur la case	3^7	en venant se placer sur	la case vide	4^8 ;
II.	»	3^5	»	»	4^4 ;
III.	»	1^7	»	»	0^8 ;
IV.	»	1^5	»	»	0^4.

(1) En général, si i désigne l'un des nombres $+1$ ou -1, et j l'un de ces deux nombres, le pion placé en p^q peut prendre le pion placé en $(p+i)^{q+j}$, de couleur opposée, s'il peut venir se placer sur la case vide $(p+2i)^{q+2j}$.

Une dame peut aussi s'emparer d'un pion de l'adversaire lorsque, dans son déplacement ordinaire, elle peut venir occuper la case qui suit immédiatement celle du pion opposé. D'ailleurs, la dame peut continuer son mouvement sur les cases vides situées au delà.

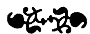
Un pion (ou une dame) peut prendre successivement, dans différentes directions et sans s'arrêter, conformément aux principes qui précèdent, plusieurs pions ou dames de l'adversaire. Cependant on doit observer les règles suivantes :

1° On doit toujours opérer de façon à prendre le plus possible de pièces à l'adversaire. Deux pions valent plus qu'une dame ; deux pions et une dame valent plus que trois pions et moins que quatre.

2° On ne peut sauter une seconde fois sur un pion déjà pris une première fois.

3° On ne peut enlever les pions pris successivement avant d'avoir effectué complètement le déplacement du pion ou de la dame qui prend.

4° Un pion ne peut être damé lors de son passage sur l'une des cases de la dernière ligne de l'ennemi, s'il ne vient s'arrêter sur cette case.



VINGT CONTRE UN.

Dans la partie de *Qui perd gagne*, il est convenu d'appliquer les règles ordinaires du jeu de dames, avec cette différence que l'un des joueurs a gagné la partie, dans tous les cas où il la perdrait au jeu ordinaire, c'est-à-dire lorsqu'il parvient à faire

prendre tous ses pions, ou à les faire bloquer. La partie se joue encore avec vingt pions noirs et vingt pions blancs ; mais nous ne considérerons que la partie singulière dans laquelle vingt pions noirs luttent contre un seul pion blanc, et gagnent nécessairement la partie.

Ce problème a été étudié, pour la première fois, par Lamarle (1) qui en a donné une solution développée en 47 pages in-4°, et comportant 800 coups différents. Mais la marche suivie par cet auteur est fort longue et difficile à retenir ; celle que nous allons exposer repose sur la considération d'une position fondamentale, que nous appellerons la *citadelle,* et à laquelle on peut ramener un grand nombre de parties du *Qui perd gagne*. En effet, bien qu'il ne soit pas permis de bloquer l'adversaire sur une seule case, puisque l'on perdrait la partie, on peut cependant l'enfermer dans l'espace de deux cases contiguës, au coin du damier, au moyen de *quatre pions factionnaires*. Dès lors, la bataille doit être considérée comme gagnée, dans le camp des factionnaires, puisqu'il devient possible de disposer le jeu des autres pions d'une façon systématique, et de s'assurer la victoire, sans aucun nouvel effort de mémoire ou d'attention, par un procédé régulier de stratégie.

Mais depuis la publication de notre solution, dans la *Revue scientifique* du 16 août 1879, nous avons trouvé le moyen de l'améliorer, de donner une plus grande extension à nos résultats, et de rectifier plusieurs assertions inexactes de Lamarle. D'ailleurs, afin de classer plus facilement les différentes parties qui peuvent se présenter, nous supposerons toujours que la bataille

(1) LAMARLE. — *Solution d'un coup singulier du jeu de dames* (*Mémoires de l'Académie des sciences de Belgique;* t. XXVII). Bruxelles, 1852.

commence par l'attaque des noirs; on ramène les autres parties aux précédentes, en laissant le pion blanc effectuer un premier déplacement.



DÉCLARATION DE GUERRE.

Les vingt pions noirs sont placés sur le damier, comme au début d'une partie ordinaire; du côté opposé se trouve un seul pion blanc occupant l'une quelconque des dix-huit cases recouvertes d'un pion blanc, dans la fig. 2.

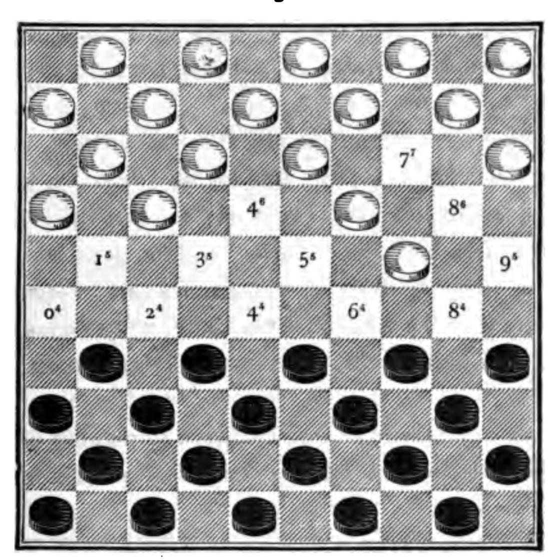
Les pions noirs commencent l'attaque, et remportent nécessairement la victoire en exécutant les divers plans de bataille que nous allons indiquer, c'est-à-dire de manière à ce qu'ils soient tous pris successivement par le pion blanc, sans que celui-ci puisse parvenir soit à se mettre en prise, soit à se faire cerner.

Plus particulièrement, si le pion blanc occupe l'une des cases de la dernière ligne, les noirs peuvent toujours gagner la bataille, soit que l'attaque provienne du pion blanc, soit qu'elle vienne des pions noirs. C'est le problème étudié par Lamarle; mais, en outre, nous avons recherché toutes les positions initiales du pion blanc pour lesquelles les noirs gagnent nécessairement la partie, en combattant les premiers; contrairement à l'assertion de cet auteur, nous avons découvert huit autres positions initiales du pion blanc, pour lesquelles le gain des noirs est assuré. Pour toutes les autres positions initiales du pion blanc, celui-ci peut toujours se faire prendre, en jouant convenablement, après les noirs; il est assez facile de le faire voir.

Pour suivre les différentes péripéties de la bataille, il est indis-

pensable de se procurer un damier numéroté, ou d'en dessiner un, sur une feuille de carton, conforme à la *fig*. 2. Avec un peu

Fig. 2.



d'exercice et de mémoire, on s'accoutume à jouer et à gagner les premières parties contre un adversaire quelconque, tout en ayant les yeux recouverts d'un bandeau ; plusieurs personnes ont réussi cette expérience.

ESCARMOUCHES.

Nous allons exposer un procédé général d'élimination, au moyen duquel on peut supprimer un, deux ou trois pions noirs,

sans modifier la position respective de tous les autres pions. — A la droite du damier vu du côté des noirs se trouve une colonne contenant les cinq cases blanches $9^1, 9^3, 9^5, 9^7, 9^9$; nous l'appellerons *frontière de droite*. De même, à la gauche du damier, il y a une colonne contenant les cinq cases blanches $0^0, 0^2, 0^4, 0^6, 0^8$; nous l'appellerons *frontière de gauche*. Lorsque le pion blanc se trouve sur l'une des frontières, on peut, dans un très grand nombre de positions, conduire le mouvement stratégique des noirs, de manière à faire prendre un, deux ou trois pions noirs appartenant aux trois premières colonnes de l'aile gauche ou aux trois dernières de l'aile droite. Mais, pour cela, il faut et il suffit : 1° que l'exposant des pions noirs soit inférieur de trois ou de quatre unités à celui du pion blanc ; 2° que dans la marche forcée du pion blanc, celui-ci ne puisse se faire prendre par les noirs.

Supposons, par exemple, que l'attaque commence par le mouvement des noirs, et que la position respective des ennemis soit :

Un pion noir en 0^2 ou en 2^2. — *Un pion blanc* en 0^6.

On opérera comme il suit :

I.	*Noir*, de 0^2 ou de 2^2 en 1^3 ;	— *Blanc*, de 0^6 en 1^5.
II.	de 1^3 en 0^4 ;	de 1^5 en 2^4.
III.	de 0^4 en 1^5 ;	de 2^4 en 0^6.

Ainsi, après trois coups, le pion blanc revient en 0^6, ayant pris le pion noir situé d'abord en 0^2 ou en 2^2.

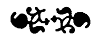
Supposons une seconde position de combat dans laquelle les noirs commencent l'attaque avec deux pions en 0^2 et en 2^2, le

pion blanc en o^6 ; on répétera deux fois la manœuvre des trois coups précédents.

On observera encore que si le pion noir est en 1^3, quand le pion blanc est en o^6, l'armée des noirs a un coup d'avance ; alors on déplacera un autre pion noir quelconque ; puis on réalisera les deux derniers coups du tableau précédent.

Enfin, si le pion blanc se trouve en o^6, et si les noirs possèdent trois pions en o^2, 2^2 et 1^3, avec un autre pion quelconque, on pourra faire prendre les trois premiers pions et faire revenir le blanc en o^6, après neuf coups, d'après la tactique que nous venons d'exposer.

On suivra la même tactique du côté de l'aile droite, et quelquefois au centre.



LA CITADELLE.

Avant de donner le tableau de tous les coups qui se présenteront dans les divers engagements du *Qui perd gagne*, il est bon de donner la définition de la position fondamentale, ou de la *citadelle*, et d'indiquer d'abord les différents procédés qui permettent de conquérir cette position, quel que soit le début du combat ; puis le procédé unique de stratégie qui permet de s'assurer la victoire, aussitôt que les noirs se sont emparés de cette position.

Quatre pions noirs, que nous appelons les *quatre pions factionnaires*, occupent les cases 6^2, 7^1, 7^3, 8^2, et le pion blanc, qui est venu à dame, bon gré mal gré, sur la case 8^0, est bloqué dans les



cases 8^0 et 9^1, où il va et vient pendant que les noirs préparent

Fig. 3.

leur attaque finale. La partie droite de la *fig.* 3 représente cette position.



L'ASSAUT.

Supposons que quatre pions noirs occupent les positions 6^0, 8^0, 5^1, 7^1, et que le pion blanc soit en 7^3 ou en 9^3; les noirs commencent l'attaque, et la partie se joue forcément pour le pion blanc, conformément au tableau suivant :



I.	*Blanc* en 7^3 ou 9^3;	*Noirs* de 7^1 en 6^2;
II.	» en 8^2;	» 8^0 en 7^1;
III.	» en 9^1;	» 6^2 en 7^3;
IV.	» en 8^0, à dame;	» 5^1 en 6^2;
V.	» en 9^1;	» 7^1 en 8^2;
VI.	» en 8^0;	» 6^0 en 7^1.

La dame blanche, arrivée en 9^1, est bloquée par les quatre factionnaires sur les cases 8^0 et 9^1; les noirs occupent ainsi la position fondamentale. La partie serait la même s'il existait un nombre quelconque de pions noirs à la gauche du damier.

Pour simplifier, nous représenterons le fragment de partie qui précède par la notation suivante :

B	79^3	8^2	9^1	8^0	9^1	8^0	9^1
N	76^2	87^1	67^3	56^2	78^2	67^1	V

Ainsi, nous renfermons entre deux traits verticaux tous les coups produits par le déplacement du pion blanc suivi du déplacement d'un pion noir ; la première ligne contient les positions successives du pion blanc. Lorsque, dans la première ligne de cette notation, l'un des chiffres n'a pas d'exposant, on lui donne celui du chiffre qui le suit immédiatement. Par exemple, sur la *première ligne,* 79^3 veut dire que le pion blanc est en 7^3 ou en 9^3.

La *seconde ligne* de la notation contient pour chaque coup deux chiffres affectés d'un seul exposant; on doit supposer que l'exposant du premier chiffre est inférieur d'une unité à celui du second. Par exemple, sur la seconde ligne, 76^2 veut dire

qu'un pion noir s'est déplacé de 7^1 en 6^2 ; l'exposant de 7 est 2 diminué de 1 ([1]).

Enfin la lettre V indique que les noirs occupent la position fondamentale.

On peut encore arriver à cette occupation en partant de plusieurs autres positions initiales. Voici quelques exemples :

I. — Si le pion blanc est en 8^4, la position initiale des noirs restant la même, ceux-ci ont un coup d'avance et doivent déplacer un pion quelconque du champ de bataille autre que l'un des quatre pions destinés à servir de factionnaires; cependant, si les noirs occupaient la case 6^2, ils joueraient d'abord 6^2 en 5^3, et continueraient l'attaque comme il est écrit plus haut.

II. — Si le pion blanc est en 9^5, les noirs en 6^0, 8^0, 5^1, 7^1, et possédant un autre pion quelconque à la gauche, ceux-ci ont deux coups d'avance, et après ces deux coups le pion blanc vient en 7^3 ou en 8^3 ; on continue comme ci-dessus.

III. — Enfin, si le pion blanc est en 9^5, et si les noirs occupent l'une ou l'autre des cases 8^2 et 9^1, ou toutes les deux, et une case à gauche, on élimine séparément ou successivement les pions 8^2 et 9^1, par escarmouche, et l'on est ramené à l'un des cas précédents.

([1]) Dorénavant, nous nous servirons exclusivement de cette notation pour la suite des parties que nous avons en vue. Elle est préférable à celle que nous avons employée dans notre article de la *Revue scientifique*, et que nous avons empruntée à Lamarle. Cette dernière est, pour ainsi dire, une *notation statique*, puisqu'elle donne, après chaque coup, la position de tous les pions; la nôtre, au contraire, est une notation *cinématique*, qui indique seulement le déplacement du pion blanc et d'un pion noir. Elle exige beaucoup moins de caractères, et peut, avec quelques petites modifications, s'adapter à toutes les parties du jeu de dames.

LES PARALLÈLES.

Désignons sous le nom de ***parallèles*** les lignes blanches parallèles à la grande diagonale; par ***transversales***, les lignes blanches perpendiculaires; comptons les neuf parallèles de la parallèle 8^0 — 9^1 à la parallèle 0^8 — 1^9, et les dix transversales de la transversale 0^0 à la transversale 9^9.

Fig. 4.

Supposons les pions noirs placés dans les cinq premières transversales, et le pion blanc sur une case des quatre dernières. Si les pions noirs occupent toutes les cases de la quatrième et de la cinquième transversale, depuis la première parallèle 8^0 — 9^1 jusqu'à

celle qui est occupée par le pion blanc, on déplacera transversalement les pions de la cinquième transversale 8^0 — 0^8, en laissant toujours une case vide devant le pion blanc.

Ainsi, dans la position de la *fig.* 4, les noirs arrivent nécessairement à la position fondamentale, soit qu'ils jouent en premier, soit qu'ils jouent en second; de plus, le nombre et la position des pions des trois premières transversales sont absolument arbitraires. Si, par exemple, le pion blanc joue en 4^8, les noirs jouent successivement 2^6 en 1^7, 3^5 en 2^6, 4^4 en 3^5, 5^3 en 4^4, et 6^2 en 5^3; alors le pion noir est arrivé en 7^3 ou en 9^3, et l'on est ramené à l'une des positions du paragraphe précédent.



LES BASTIONS.

Voici un autre procédé général de stratégie, qui conduit encore les noirs à occuper la citadelle. Supposons que les noirs soient sur les positions 4^0, 6^0, 8^0, 6^2 et 8^2 et commencent l'attaque, le pion blanc étant en 7^5. Les noirs jouent 4^0 en 5^1, et le pion blanc vient en 6^4 ou en 8^4; les noirs exécutent alors l'une ou l'autre des deux manœuvres suivantes :

B	7^5	6^4	8^2	9^1	8^0	9^1	8^0	9^1
N	45^1	87^3	87^1	67^3	56^2	78^2	67^1	V

ou bien

B	7^5	8^4	9^3	8^2	9^1	8^0	9^1	8^0	9^1
N	45^1	87^3	76^4	87^1	67^3	56^2	78^2	67^1	V

Pour abréger, nous réunirons les deux fragments qui précèdent dans le tableau suivant :

B	7^5	6^4	8^2	—	9^1	8^0	9^1	8^0	9^1
N	45^1	87^3	87^1	—	67^3	56^2	78^2	67^1	V
		8^4	9^3	8^2					
		87^3	76^4	87^1					

Les traits verticaux plus longs ont ici le rôle des parenthèses; les deux traits horizontaux indiquent un temps d'arrêt dans la première tactique, qui a un coup de moins que la seconde.

Si, dans la position précédente, la case 7^1 est occupée par les noirs, ceux-ci pourraient encore arriver à la position fondamentale, en jouant d'abord 4^0 en 5^1; puis, en éliminant, par prise en arrière, le pion noir 6^2 ou 8^2, suivant que le pion blanc serait venu en 6^4 ou en 8^4; le pion blanc revenant en 7^5, les noirs joueraient 7^1 en 6^2 ou en 8^2, et on retrouverait la position précédente.

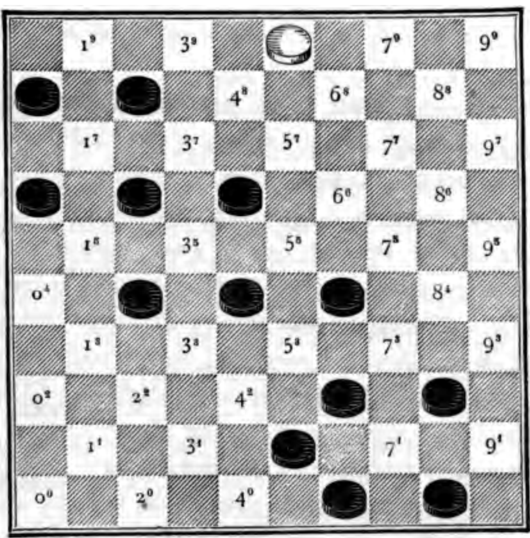
De même, dans la position de la *fig.* 5, les noirs peuvent s'emparer de la position fondamentale, soit qu'ils jouent en premier, soit qu'ils jouent en second. Si les noirs commençaient l'attaque, ils manœuvreraient ainsi :

B	5^9	4^8	6^6	8^4	9^3	8^2
N	21^7	45^7	67^5	87^3	76^4	V
		6^8	4^6	6^4	8^2	
		45^7	65^5	87^3	V	

Si le pion blanc commençait l'attaque, il suffirait, dans le tableau précédent, de supprimer le déplacement du pion noir de 2^8 en 1^7.

Les deux procédés généraux pour la prise de la citadelle, par parallèles ou par bastions, se trouvent très rarement employés dans les plans de bataille que nous allons développer; cependant il est bon de les faire connaître, parce qu'ils montrent l'existence

Fig. 5.



d'un grand nombre de parties de *Qui perd gagne*, avec vingt pions noirs contre un seul pion blanc, dans lesquelles les noirs gagnent toujours.

LA VICTOIRE.

Avant de donner les tableaux des divers plans de bataille, nous allons indiquer le procédé unique de stratégie qui permet aux

noirs de s'assurer la victoire, lorsqu'ils se sont emparés de la position fondamentale.

Il y a deux cas à considérer, selon que le camp des pions noirs ne se compose que des quatre factionnaires; ou suivant qu'il contient, en outre, un nombre arbitraire de pions noirs disséminés d'une manière quelconque. Nous ferons cependant observer que le premier cas ne se présentera pas dans les parties qui suivront.

Premier cas. — D'après ce qui précède, la dame blanche se trouve en 9^1 ou en 8^0; les noirs jouent 7^3 en 6^4 ou 6^2 en 5^3, et la dame blanche prend deux pions noirs; puis les noirs font prendre les deux autres pions, en un ou deux coups.

Deuxième cas. — Pendant que la dame blanche va et vient dans la première parallèle $8^0 — 9^1$, on conduit à dame tous les pions noirs, à l'exception des quatre factionnaires; puis, on ramène les dames dans les premières transversales, en ayant le soin de ne pas laisser d'intervalles de prise (*fig.* 3). Cela fait, on dispose une dame noire en 3^7 ou en 2^8, et lorsque la dame blanche est en 9^1, on déplace un factionnaire de 7^3 en 6^4; la dame blanche prend les deux factionnaires 8^2, 6^4, la dame 2^8, et vient se placer en 1^9. Les noirs jouent le factionnaire 7^1 en 8^2, et la dame blanche revient en 9^1; puis on amène une dame noire (ou à son défaut le dernier factionnaire) de la parallèle la plus éloignée sur la transversale $1^9 — 9^1$. On balance la dame blanche le long de cette transversale, où l'on amène toutes les autres dames noires, en les choisissant successivement dans la parallèle la plus éloignée de la position de la dame blanche.

En conséquence, nous considérons la victoire comme acquise aux noirs, lorsque le pion blanc se trouve amené dans l'une des

positions qui permettent aux noirs la conquête de la position fondamentale, par l'un des procédés de stratégie que nous avons développés ci-dessus.

LES PLANS DE BATAILLE.

Il nous reste à dresser le tableau des manœuvres à exécuter par les noirs pour s'emparer de la position fondamentale, et par conséquent pour s'assurer la victoire, lorsque le pion blanc occupe l'une des dix-huit positions indiquées dans la déclaration de guerre (*fig.* 2). Nous classerons les dix-huit positions du pion blanc de la manière suivante :

Première partie. —	Le pion blanc	est en :		$1^9, 3^9, 5^9, 7^9, 9^9$.
Deuxième partie.	»	»	»	$0^8, 2^8, 4^8, 6^8, 8^8$.
Troisième partie.	»	»	»	$1^7, 3^7, 5^7, 9^7$.
Quatrième partie.	»	»	»	$0^6, 2^6, 6^6$.
Cinquième partie.	»	»	»	7^5.

On observera que le tableau de la première partie conduit toujours à la position fondamentale, de six manières différentes, par une manœuvre de dix-huit coups, au plus, et par un ensemble de 46 positions différentes, tandis que la partie correspondante de Lamarle en comprend 240. Dans ces tableaux, la lettre V signifie qu'on se trouve dans une position qui permet d'arriver à la position fondamentale.

Ce premier tableau est facile à apprendre et à retenir, en exécutant seul les parties sur le damier, et en observant que le but à atteindre est d'amener le pion blanc sur la case 9^5; si le pion blanc cherche à s'éloigner de cette case, on l'amène alors sur la

case 1^7. J'ai appris cette partie, en moins de deux heures, à une personne qui ne connaissait ni l'Arithmétique, ni la Géométrie, et qui jouait médiocrment aux dames.

La deuxième partie se ramène toujours à la position fondamentale, de vingt-trois manières différentes, par un ensemble de 126 positions, tandis que la partie correspondante de Lamarle en contient plus de 550.

Les autres parties sont nouvelles et donnent la victoire aux vingt pions noirs, contrairement à l'opinion de cet auteur.



PREMIÈRE PARTIE.

Le pion blanc occupe l'une des cases 1^9, 3^9, 5^9, 7^9, 9^9 que nous désignons par x^9. Après le premier coup, il occupe l'une des cases 0^8, 2^8, 4^8, 6^8, 8^8 ou x^8 ; après le deuxième coup, il est en 1^7, 3^7, 5^7, 7^7 ou 9^7, c'est-à-dire en x^7. Puis la partie se subdivise en quatre rameaux principaux, d'après la tactique du pion blanc :

x^9	x^8	x^7	02^6	1^5	5^5	9^5 ‖											
32^4	54^4	98^4	23^5	12^4	76^4	V ‖											
											*						
			4^6	—						3^5	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	9^5 ‖
			43^5	—						12^4	12^2	21^3	21^1	12^2	54^4	76^4	V ‖
			6^6	4^4	0^4	1^3	3^5	2^4	4^6	5^5	9^5 ‖			3^3	5^5	9^5 ‖	
			45^5	23^3	65^3	43^3	34^4	43^5	01^3	76^4	V ‖			54^4	76^4	V ‖	
			8^6	7^5	9^7	8^6	79^5	3^5	1^7	02^6	1^5	0^4	4^4	8^4	7^3	9^5 ‖	
			89^5	98^6	21^5	23^3	76^4	12^6	87^3	98^2	12^4	01^3	65^3	89^3	98^4	V ‖	
											3^5	—					
											32^4	—					
								8^4	9^3	3^5	1^7	02^6	1^5	0^4	4^4	8^4 ‖	
								87^3	78^4	12^6	98^2	87^3	12^4	01^3	65^3	V ‖.	
													3^5	—			
													32^4	—			

DEUXIÈME PARTIE.

Le pion blanc occupe l'une des cases 0^8, 2^8, 4^8, 6^8, 8^8, ou pour abréger x^8 ; les noirs commencent l'attaque en jouant 5^8 en 4^4; la partie se subdivise immédiatement en trois autres, suivant que le pion blanc occupe 13^7 (c'est-à-dire 1^7 ou 3^7), 57^7 (c'est-à-dire 5^7 ou 7^7), ou 9^7; puis le pion noir joue, dans le premier cas, 3^8 en 2^4, et dans les deux autres 7^8 en 6^4; il se produit ensuite de nouvelles ramifications indiquées dans le tableau suivant, par les lettres A, B, C, D, E.

x^{8}	13^{7}	02^{6}	1^{5}	5^{5}	A			
54^{4}	32^{4}	23^{5}	12^{4}	34^{6}				
		4^{6}	5^{5}	3^{7}	B			
		43^{5}	34^{6}	98^{4}				
	57^{7}	4^{6}	6^{4}	4^{6}	C			
	76^{4}	65^{5}	45^{5}	98^{4}				
	9^{7}	8^{6}			4^{6}	6^{4}	8^{6}	D
	76^{4}	67^{5}			45^{5}	87^{5}	10^{4}	
		6^{6}	7^{5}	5^{7}	6^{6}	8^{4}	9^{3}	E.
		65^{5}	56^{6}	98^{4}	87^{5}	87^{3}	78^{4}	

Les rameaux suivants, A, B, C, D, E, viennent se souder aux précédents, désignés par les mêmes lettres.

Rameau A.

A	3^{7}	24^{6}	13^{8}	2^{4}	0^{6}	1^{8}	2^{4}	0^{6}	1^{8}	02^{4}	1^{8}	0^{2}	2^{4}	1^{3}	0^{2}	1^{1}	9^{8}
	98^{4}	21^{3}	10^{4}	01^{8}	01^{3}	10^{4}	01^{8}	45^{3}	76^{4}	67^{8}	12^{2}	21^{3}	21^{1}	12^{2}	54^{2}	76^{6}	V
				4^{4}	3^{3}	5^{8}	9^{8}				3^{3}	9^{8}		3^{3}	9^{8}		
				45^{3}	54^{4}	76^{4}	V				54^{2}	V		54^{2}	V		
			5^{8}	9^{8}													
			76^{4}	V.													

Rameau B.

B	24^{6}	0^{4}	4^{4}	3^{3}	5^{8}	9^{8}				2^{4}	0^{6}	1^{8}	02^{4}	1^{3}	0^{2}	1^{1}	9^{8}
	21^{8}	23^{3}	45^{3}	54^{4}	76^{4}	V				01^{8}	76^{4}	45^{3}	23^{1}	12^{2}	54^{4}	65^{3}	V
		3^{8}	1^{7}	02^{6}	1^{8}	0^{4}	4^{4} *	2^{6}	13^{8}					3^{3}	9^{8}		
		12^{6}	43^{3}	34^{2}	12^{4}	21^{3}	23^{5}	01^{3}	10^{4}					54^{4}	V		
		5^{8}	9^{8}		3^{8}	4^{4}	0^{4}			4^{4}	3^{3}	5^{8}	9^{8}				
		76^{4}	V		32^{4}	23^{3}	21^{8}			45^{3}	54^{4}	76^{4}	V.				

Rameau C.

C	35^5	4^4	0	2^6	13^5	2^4	0^6	1^5	3^3	9^5 ‖			
	32^4	23^3	21^5	01^3	10^4	01^5	43^3	32^4	54^2	V ‖			
						4^4	3^3	9^5 ‖					
						45^3	54^2	V ‖					
		6^4	8^6	7^5	6^4	—	—	—	0^6	1^5	3^3	7^3	9^5 ‖
		87^5	21^5	23^3	45^3	—	—	—	89^3	12^4	54^2	98^4	V ‖
					8^4	9^3	7^5	6^4					
					87^3	78^4	98^2	45^3					
				9^5 ‖				8^4	9^3	7^5 ‖.			
				V ‖				87^3	78^4	V ‖.			

Rameau D (¹).

D	7^5	6^4	—	—	—	0^6	0^6	0^6	1^5	02^4	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	9^5 ‖
	01^5	45^3	—	—	—	$e0^2$	$e2^2$	89^3	54	45^3	12^2	21^3	21^1	12^2	34^2	98^4	V ‖
		8^4	9^3	7^5	6^4									3^3	7^3	9^5 ‖	
		87^3	78^4	98^2	45^3									34^2	98^4	V ‖	
	9^5 ‖				8^4	9^3	7^5 ‖				3^3	7^3	9^5 ‖.				
	V ‖				87^3	78^4	V ‖				34^2	98^4	V ‖.				

Rameau E.

E	7^5	6^4	4^6	35^5	4^4	0^4	1^3	5^3	7^5	9^3 ‖
	98^2	45^5	89^3	32^4	23^3	67^3	32^2	76^4	98^4	V ‖
					6^4	7^3	9^5 ‖			
					65^3	98^4	V ‖			
		8^4	9^3	7^5 ‖.						
		87^3	78^4	V ‖.						

(¹) Dans cette partie et dans quelques autres, les signes $e\,0^2$, $e\,2^2$ indiquent l'élimination, par escarmouche, des pions noirs 0^2 et 2^2.



TROISIÈME PARTIE.

Le pion blanc occupe l'une des cases 1^7, 3^7, 5^7, 9^7.

I. — *Le pion blanc occupe l'une des cases* 1^7 *ou* 3^7 (¹).

13^7	0^6	1^5	5^5	9^5 ‖
98^4	54^4	32^4	76^4	V ‖

2^6	1^5	2^6	Δ	2^6	13^5	4^4	—	—	—	3^3	5^5	—
56^4	$e1^3$	01^3		67^5	89^3	45^3	—	—	—	54^4	76^4	—

02^4	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	9^3	8^4	7^3	9^3 ‖
45^3	12^2	21^3	21^1	12^2	54^4	76^4	65^3	76^6	98^4	V ‖

3^5	4^1	0^4	1^3	3^5	2^4	4^6	3^5	5^3	9^3	8^2	8^6	9^7	8^6	79^5	68^4 ‖
32^4	23^3	65^3	43^3	34^4	43^5	67^5	54^4	76^2	56^2	45^1	$e8^4$	98^2	01^3	10^4	V ‖

5^5	9^5 ‖
76^4	V ‖

1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1 ‖
12^2	21^3	21^1	12^2	54^4	V ‖

4^6	3^5	2^4	0^2	2^4	4^6	35^5	2^4	0^6	1^5	02^4	3^3	9^5 ‖
10^4	34^4	01^3	21^3	43^5	87^5	56^4	01^5	45^3	78^4	76^6	54^4	V ‖

3^3	9^5 ‖
54^4	V ‖

4^4	6^6	8^4	7^3	9^5 ‖
65^3	57^5	89^3	98^4	V ‖

5^5	9^5	8^4	6^6	57^5	—	—	—	6^4	2^4	0^2	2^4	0^6	1^5	02^4	F
76^4	56^4	67^5	45^3	54^4	—	—	—	65^3	01^3	21^3	01^5	45^5	56^2	89^3	

8^4	9^3	7^5	8^4	9^3	7^5	68^4 ‖.
87^3	78^4	98^2	87^3	78^4	34	V ‖

Rameau F.

F	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	9^3 ‖
	12^2	21^3	21^1	12	34^2	98^4	V ‖

—	—	—	3^3	7^3	9 ‖.
—	—	—	34^2	98^4	V ‖

(¹) Le signe Δ indique une élimination, par escarmouche, des trois pions 2^2, 1^3, 3^3; on en trouve un autre exemple dans le rameau B de la deuxième partie, dans les trois coups placés avant le signe * (p. 29). Il y a deux manières d'opérer, selon la tactique du pion blanc.

II. — *Le pion blanc est en* 5^7.

Les noirs jouent 1^3 en 0^4, et le pion blanc vient en 4^5 ou en 6^6; dans le premier cas, les noirs jouent 9^2 en 8^4 et la partie se ramène à la précédente; dans le second cas, les noirs jouent 3^3 en 2^4, et le pion blanc vient en 5^5 ou en 7^5; mais la suite de la partie est longue, et nous n'avons pu la simplifier jusqu'à présent. Nous la laisserons de côté pour l'instant.

III. — Si le pion blanc est en 9^7, on élimine d'abord, par escarmouche, les pions 9^3 et 7^3; on continue ainsi :

9^7 54^4	8^6 10^4	7^5 01^5	6^4 45^3	— —	— —	0^6 $e0^2$	0^6 $e2^2$	0^6 45^5	1^5 89^3	02^4 98^4	1^3 12^2	0^2 21^3	2^4 21^1	1^3 12^2	0^2 54^2	1^1 54^6	9^5 V
			8^4 $e8^2$	7^5 98	6^4 45^3						3^3 54^2	9^5 V		3^3 54^2	9^5 V		
		9^5 V			8^4 $e8^2$	7^5 V.											

QUATRIÈME PARTIE.

Le pion blanc occupe l'une des cases 0^6, 2^6, 6^6.

I. — *Le pion blanc est en* 0^6 (1).

0^6 34^4	1^5 10^4	2^4 01^3	0^2 21^3	2^4 01^5	0^6 43^5	1^5 32^6	3^7 98^4	24^6 43^3	1^5 32^4	3^3 54^4	5^3 76^4	9^5 V				
									5^5 34^4				1^3 12^2	0^2 54^4	1^1 76^4	9^5 V
									3^5 32^4	* 1^3 12^2	0^2 21^3	2^4 21^1	3^3 54^4	5^5 76^4	9^5 V	

(1) A partir du signe *, le reste de la partie se trouve dans la première partie (p. 28); il en est de même pour plusieurs autres, avec de légères modifications.

II. — *Le pion blanc est en* 2^6.

2^6	1^5	0^4	2^6	1^5	0^4	4^4	2^6	13^5	02^4	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	7^7	G
56^4	12^4	21^5	01^3	12^4	21^3	23^5	67^5	98^4	45^3	12^2	21^3	21^1	12^2	54^1	76^6	76^4	
				3^5	4^4	0^4			4^1	—	—	—	3^3	5^5	—		
				32^1	23^3	21^5			45^3	—	—	—	54^4	76^6	—		
	3^5	4^4	6^6	5^5	1^5	0^6	1^6	1^5	02^4	1^3	0^2	2^4	1^3	0^2	1^1	9^5	
	32^4	65^5	23^3	34^4	$e1^3$	$e0^2$	98^4	76^4	45^3	12^2	21^3	21^1	12^2	54^4	34^2	V	
										3^3	9^5		3^3	9^5			
										54^4	V		54^4	V			
				7^5	9^3	7^5	6^4	0^6	—	—	1^5	23^3	7^3	9^5			
				98^4	78^4	21^5	45^3	89^3	—	—	12^4	54^2	98^4	V			
							8^4	7^5	8^4	7^5							
							$e8^2$	98^2	$e8^2$	V							

Rameau G.

G	6^6	5^5	7^7	6^6	8^4	7^3	9^5				5^5	7^3	9^5		
	67^5	76^6	65^3	87^5	89^3	98^4	V				56^4	98^4	V		
				8^6	7^5	9^7	8^6	79^5	8^4	6^6	7^5	9^3			
				89^5	98^6	87^3	98^2	76^4	67^5	89^3	98^4	V			
	8^6	9^5	7^7	6^6	8^4	7^3	9^5				6^4	8^2			
	87^5	78^6	65^3	67^5	89^3	98^4	V				87^3	V			
				8^6	7^5	5^7	46^6	3^5	5^3	7^5	8^4	9^3			
				65^5	56^6	87^3	98^2	54^4	76^4	76^2	87^3	V			
					9^5			7^5			5^5	7^3	9^5		
					V			56^4			76^4	98^4	V		
								5^5	4^4	6^6	7^5	6^4	8^6	79^5	79^3
								56^4	65^5	89^3	78^4	87^5	32^2	98^4	V

III. — *Le pion blanc est en* 6^6.

$\| 6^6 | 5^5 | 1^5 | 2^4 | 0^2 | 2^4 | 0^6 | 1^5 | 02^4 | 1^3 | 0^2 | 2^4 | 1^3 | 0^2 | 1^1 | 9^r \|$
$\| 32^4 | 54^4 | 10^4 | 01^3 | 21^3 | 01^5 | 45^3 | 76^4 | 98^4 | 12^2 | 21^3 | 21^1 | 12^2 | 54^4 | 34^2 | V \|$

$| 3^3 | 9^r \| \quad | 3^3 | 9^r \|$
$| 54^4 | V \| \quad | 54^4 | V \|$

$| 7^5 | 9^3 | 7^5 | 6^4 | — | — | — | 4^6 | 3^5 | 1^7 | 02^6 | 1^5 | 0^4 | 4^4 | 8^4 | 7^3 | 9^r \|$
$| 98^4 | 78^4 | 54^4 | 45^5 | — | — | — | 21^5 | 12^6 | 67^3 | 23^3 | 12^4 | 01^3 | 45^3 | 89^3 | 98^4 | V \|$

$| 8^4 | 9^3 | 7^5 | 6^4 | \quad | 5^5 | H | \quad | 3^5 | — |$
$| 87^3 | 78^4 | 98^2 | 45^5 | \quad | 89^3 | \quad | 32^4 | — |$

$| 8^4 | 9^3 | 7^r \|$.
$| 87^3 | 78^4 | V \|$

Rameau **H.**

$| H | 4^4 | 2^6 | 13^5 | 2^4 | 0^6 | 1^5 | 3^3 | 7^3 | 9^r \|$
$| \; | 23^3 | 01^3 | 10^4 | 01^5 | 43^3 | 32^4 | 54^2 | 98^4 | V \|$

$| 4^4 | — | — |$
$| 45^3 | — | — |$

$| 6^4 | 7^3 | 9^r \|$.
$| 65^3 | 98^4 | V \|$



CINQUIÈME PARTIE.

Le pion blanc est en 7^5.

$\| 7^5 | 9^3 | 7^5 | 6^4 | 4^6 | 35^5 | 4^4 | 0^4 | 2^6 | 13^5 | 2^4 | 0^6 | 1^5 | 3^3 | 7^3 | 9^r \|$
$\| 98^4 | 78^4 | 54^4 | 45^5 | 89^3 | 32^4 | 23^3 | 21^5 | 01^3 | 10^4 | 01^5 | 43^3 | 32^4 | 54^2 | 98^4 | V \|$

$| 6^4 | 7^3 | 9^r \| \quad | 4^4 | — | — |$
$| 65^3 | 98^4 | V \| \quad | 45^3 | — | — |$

$| 8^4 | 9^3 | 7^5 | 6^4 | 4^6 |$ Suite comme au sixième coup
$| 87^3 | 78^4 | 98^2 | 45^5 | 89^3 |$ de la première ligne.

$| 8^4 | 9^3 | 7^5 \|$.
$| 87^3 | 78^4 | V \|$

En résumé, si le pion blanc est placé sur l'une des dix-sept cases suivantes :

1^9, 3^9, 5^9, 7^9, 9^9, 0^8, 2^8, 4^8, 6^8, 8^8, 1^7, 3^7, 9^7, 0^6, 2^6, 4^6, 7^5,

les noirs commencent la partie, peuvent toujours occuper la position fondamentale après trente-deux coups, au plus, de soixante et onze manières différentes, et finissent par remporter la victoire.

Il y aurait lieu d'étudier la même partie sur le damier de soixante-quatre cases, ou de cent quarante-quatre ; le lecteur trouvera quelques autres indications de ce genre dans notre troisième récréation sur les jeux de marelle.



DEUXIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DE DOMINOS.

A Monsieur Dionys Ordinaire, député du Doubs.

« Je joue aux dominos quelquefois chez Procope.
— Ma foi, c'est un beau jeu, l'esprit s'y développe,
Et ce n'est pas un homme à faire un quiproquo,
Celui qui juste à point sait faire domino. »

(ALFRED DE MUSSET.)

Les plaisirs sont amers, d'abord qu'on en abuse.
Il est bon de jouer un peu,
Mais il faut seulement que le jeu nous amuse.

Mme DESHOULIÈRES.)



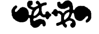


DEUXIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DE DOMINOS.

On croit généralement que le jeu de dominos nous vient des Hébreux ou des Grecs; la simplicité des dispositions de ce jeu porte facilement à croire qu'il doit être, en effet, contemporain des premiers âges de la civilisation. Les étymologistes ne sont pas d'accord sur l'origine de son nom; les uns l'attribuent à la ressemblance que les dominos ont avec le camail des anciens chanoines, formé d'une étoffe noire doublée de blanc; mais l'interprétation la plus probable semblerait être celle-ci : Le jeu du domino était autrefois permis dans les couvents et les communautés religieuses. Or, lorsqu'un joueur gagnait la partie en posant le premier son dernier dé, il poussait une exclamation de joie en bénissant le Seigneur : *Benedicamus Domino;* ou encore : *Domino gratias* (Merci ! mon Dieu), et de là vient, par abréviation, le mot *Domino*.





DÉFINITION.

Les dominos sont des jetons ayant la forme d'un prisme rectangle dont la largeur est double de l'épaisseur, et dont la longueur est double de la largeur. La partie inférieure est habituellement en bois noir, en ébène; la face supérieure, en os ou en ivoire, est divisée en deux carrés sur lesquels sont marqués les points. Le jeu se compose de vingt-huit dominos formant les combinaisons complètes des sept nombres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

pris deux à deux. Le domino se désigne par les deux points qu'il porte; par exception, le **0** s'appelle *blanc*, et le **1** s'appelle *as;* quand les numéros sont égaux, le domino s'appelle un double.

Nous représenterons souvent les dominos de la manière suivante :

Fig. 6.

06	16	26	36	46	56	66
05	15	25	35	45	55	
04	14	24	34	44		
03	13	23	33			
02	12	22				
01	11					
00						

Si l'on fait la somme de tous les points contenus dans le jeu, on trouve 168 points; puis, si l'on divise cette somme par le

nombre des dominos, on obtient la *moyenne* de chaque dé, qui est égale à six, et reste la même, si l'on enlève tous les doubles.

On rencontre quelquefois dans le commerce des jeux complets de dominos qui finissent au double-sept, au double-huit, au double-neuf, etc. Dans ce cas, on peut démontrer que la moyenne de chaque dé est égale à sept, à huit, à neuf, etc.; il nous suffira d'indiquer le mode de démonstration pour le jeu ordinaire; il sera facile de l'étendre ensuite à un jeu complet quelconque. Dans le jeu qui se termine au double-six, nous appellerons *dominos complémentaires*, deux dominos qui peuvent être accouplés de telle sorte que les points contenus dans chacun des carrés du premier ajoutés respectivement aux points contenus dans les carrés du second forment une somme égale à six. Ainsi, par exemple, le deux-cinq et le quatre-as sont complémentaires; il peut arriver qu'un dé soit égal à son complémentaire; il en est ainsi pour quatre dés du jeu ordinaire, pour le blanc-six, l'as-cinq, le deux-quatre et le double-trois. Si l'on prend les dés complémentaires de tous les dés d'un jeu ordinaire, on forme, dans un autre ordre, le même jeu. La somme des points d'un jeu et de son complémentaire est donc égale à 12 fois le nombre des dés, et la somme de chacun d'eux en est la moitié, ou six fois le nombre des dés. Par suite, la moyenne des dominos est égale à six, et ne change pas, lorsque l'on enlève un dé dont la somme des points vaut six, ou deux dés complémentaires. La moyenne est donc encore égale à six, si l'on ne tient pas compte des doubles.

Dans le cas général, si l'on suppose que le jeu se termine au double n, le nombre des dominos est égal à

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

et le nombre total des points est égal à

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ce nombre représente le triple du nombre des boulets d'une pile triangulaire ayant n boulets sur chaque côté. Nous donnerons à ce sujet les énoncés des trois théorèmes suivants, dont les deux derniers soupçonnés à la suite d'une visite à l'arsenal de Rennes, en 1870, furent le point de départ des recherches de l'auteur sur divers points de la théorie des nombres.

THÉORÈME I. — *Le nombre total des points d'un jeu complet de dominos n'est jamais égal au carré d'un nombre entier.*

THÉORÈME II. — *Le nombre total des boulets d'une pile à base carrée n'est jamais égal au carré d'un nombre entier, en exceptant les cas où la pile contient* 1 *ou* 24 *boulets sur le côté de la base.*

THÉORÈME III. — *Le nombre total des boulets d'une pile à base triangulaire n'est jamais égal au carré d'un nombre entier, en exceptant les cas où la pile contient* 1, 2 *ou* 48 *boulets sur le côté de la base.*



LES DOMINOS MAGIQUES.

On peut se proposer, avec les dominos, divers jeux de combinaison numérique, par la considération des points contenus sur chacun d'eux. Nous donnerons d'abord la solution du problème suivant :

Disposer les sept as du jeu et deux autres dés, dans les cases d'un carré de neuf cases, de telle sorte que la somme des points des dominos renfermés dans une ligne, dans une colonne ou dans une diagonale soit constamment la même.

On placera les sept as du jeu, le deux-six et le trois-six, conformément à la *fig.* 7.

La somme des points contenus dans chacune des lignes, des colonnes ou des diagonales, est constamment égale à quinze. On trouve cette figure, sous une forme peu différente, à la page XIII de l'Introduction du tome Ier.

Fig. 7.

26	01	15
12	14	16
13	36	11

Fig. 8.

16	00	05
02	04	06
03	26	01

Si l'on remplace les as par les blancs correspondants, le **26** et le **36** par **16** et **26**, on obtient la *fig.* 8, dans laquelle les sept blancs et deux autres dés forment un carré magique dont la somme constante est douze.

De même si, dans la *fig.* 7, on remplace les as par des deux, le **26** et le **36** par le **36** et le **46**, on forme un carré magique contenant les sept deux, dans lequel la somme constante est dix-huit. On formera encore des carrés magiques contenant tous les trois, ou tous les quatre, avec deux autres dés, et dans lesquels la somme constante est vingt et un ou vingt-quatre.

Enfin, si dans chacun des carrés précédents on remplace chaque domino par le domino complémentaire, on forme de nouveaux carrés magiques, et plus particulièrement ceux qui contiennent tous les cinq ou tous les six.



LES DOMINOS DIABOLIQUES.

Nous laisserons de côté pour l'instant la théorie générale des figures que nous venons de considérer; nous la reprendrons dans la récréation sur les carrés magiques et diaboliques. Cependant nous indiquerons encore quelques figures de carrés diaboliques obtenues par l'emploi de seize ou de vingt-cinq dominos. Ces figures amusent beaucoup les petits enfants, et fournissent l'occasion de leur apprendre à compter; sous ce point de vue, ce sont des exercices faciles pour leur apprendre, sans aucun effort, les premiers procédés du calcul mental.

Disposer les blancs et les as d'un jeu de dominos, avec trois autres dés convenablement choisis, sur les cases d'un carré de seize cases, de telle sorte que la somme des points des dominos renfermés dans une ligne, dans une colonne ou dans une diagonale, soit constamment la même.

On placera les seize dominos conformément à la *fig.* 9.

Fig. 9.

26	12	13	03
14	02	36	11
05	15	01	06
00	25	04	16

La somme des points contenus dans chacune des quatre lignes, des quatre colonnes ou des deux diagonales est constamment égale à dix-huit. D'ailleurs cette figure diffère des deux précédentes, en ce qu'elle conserve les mêmes propriétés de sommes constantes, lorsque l'on place la première colonne après la quatrième, ou la première ligne au-dessous de la quatrième, et aussi en continuant cette opération, de telle sorte que l'un des dominos peut occuper une case quelconque du carré.

On obtient de nouveaux carrés diaboliques en remplaçant dans cette figure un dé quelconque par un dé contenant un point de plus, ou deux, ou trois; dans ce cas, la somme constante devient égale à vingt-deux, à vingt-six ou à trente.

On obtient de nouvelles figures possédant les mêmes propriétés, en remplaçant chacun des dominos de l'une des figures précédentes par le domino complémentaire.

Fig. 10.

35	03	06	22	51
11	32	61	45	40
62	46	00	21	24
01	31	52	63	33
44	41	34	02	05



Pour les carrés diaboliques de vingt-cinq cases, on les disposera d'après la *fig.* 10, dans laquelle la somme constante est vingt-sept.

On pourra obtenir d'autres figures par les divers procédés que nous avons exposés précédemment. D'ailleurs, si l'on place à côté les uns des autres, sans laisser d'intervalle, les dominos représentés dans la *fig.* 10, on forme un rectangle composé de cinq lignes horizontales de carrés, et de dix colonnes verticales; la somme des points renfermés dans chacune des colonnes est alternativement quatorze ou treize.



LE COUP MAXIMUM.

Le jeu de dominos se joue à deux, à trois ou à quatre; dans ce dernier cas, les joueurs peuvent jouer séparément, ou s'associer deux à deux. Il se joue encore, avec un *mort*, comme au whist; mais les règles de ces différentes parties sont suffisamment connues pour qu'il soit inutile de les développer ici.

Dans la partie du domino à quatre, lorsque chacun des joueurs prend sept dés, il existe plusieurs dispositions curieuses dans lesquelles le premier joueur gagne nécessairement la partie, pendant que le deuxième et le troisième joueur ne peuvent parvenir à poser un seul dé. Supposons, par exemple, que le premier joueur possède les quatre premiers blancs et les trois derniers as, c'est-à-dire les dominos

00, 01, 02, 03, 14, 15, 16;

que le quatrième joueur possède les six dés qui forment les autres blancs et les autres as

11, 12, 13, 04, 05, 06,

et un domino quelconque, et que les deux autres joueurs se partagent ce qui reste. Dans ce cas, le premier joueur gagne nécessairement la partie après la pose des treize dominos indiqués plus haut, tandis que les autres joueurs n'ont pu poser aucun autre dé. Le nombre total des points de ces treize dés étant égal à quarante-huit, le premier joueur gagne donc cent vingt points en un seul coup; c'est le *coup maximum.*

En effet, le premier joueur pose le double-blanc ; le deuxième et le troisième joueurs boudent, et bouderont chaque fois, car le premier joueur s'arrange toujours de manière à placer du blanc ou de l'as aux deux extrémités du tableau ; le quatrième joueur peut poser l'un des trois blancs **04, 05, 06**. Le premier joueur posera l'as correspondant **41, 51, 61**. Puis, si le quatrième joueur pose le **11**, le **12** ou le **13**, le premier répondra par **10**, **20** ou **30**, et finira ainsi par poser tous ses dés.

On obtient d'autres parties semblables à la précédente, en échangeant le blanc ou l'as avec l'un quelconque des points **2**, **3**, **4**, **5**, **6**. Par suite, le nombre des parties de cette sorte est égal au nombre des combinaisons simples de sept objets pris deux à deux, ou vingt et un. La probabilité de la rencontre d'une telle partie dans le tirage au sort des dés est extrêmement petite.





DEVINETTE ARITHMÉTIQUE.

Les dominos étant tous retournés, et placés en A (*fig.* 11), on en tire successivement un, deux, trois, etc., jusqu'à douze, et on les place en B; on en prend un treizième que l'on place en C, après avoir regardé, en cachette, le nombre des points qu'il contient. Supposons, par exemple, qu'il en contienne *cinq;* on retire alors de A, pour les placer en B, d'autres dominos en continuant à compter *six*, sept, huit, etc., jusqu'à douze. Puis, on prend encore en A un domino que l'on place en C, après avoir regardé le nombre des points qu'il renferme.

Fig. 11.

A	B	C

On continue à prendre des dominos en A, pour les placer en B, en recommençant à compter de ce nombre jusqu'à douze, et ainsi de suite. Au bout d'un certain temps, le jeu se trouve épuisé en A; alors deux cas peuvent se présenter : 1° Si l'on tire le dernier dé de A en comptant treize, on le place en B et non en C, et la manœuvre est terminée; 2° si l'on prend le dernier dé de A en comptant moins de treize, *huit*, par exemple, on replace ce dé en A en disant *neuf;* puis on reprend d'autres dominos de B en comptant dix, onze, etc., jusqu'à treize, et la manœuvre est encore terminée. Cela fait, les dominos étant toujours retournés, on propose à une personne qui connaît la marche de l'opération, mais n'en a pas suivi les détails, de deviner le nombre total des points des dominos situés en C.

Règle pratique. — Pour résoudre cette question, il suffit de multiplier par 13 le nombre augmenté d'une unité des dominos placés en C, de retrancher du produit obtenu le nombre des dominos placés en A et le nombre total des dominos employés, car on peut se servir de plusieurs jeux complets ou incomplets.

Démonstration. — Désignons par p le nombre des dominos situés en C, par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_p$, les points de chacun d'eux dans l'ordre où ils ont été obtenus, par x le nombre de points que l'on cherche, par N le nombre total des dés employés, par q le nombre des dominos qui restent en A, et enfin par y le nombre de dominos comptés après l'enlèvement de a_p jusqu'à l'épuisement du jeu. On a tiré successivement de A des nombres de dominos représentés par

$$12,\ 13 - a_1,\ 13 - a_2,\ \ldots,\ 13 - a_{p-1},\ y + 1,$$

dont la somme est égale à N. On a donc l'égalité

$$N = 13p + y - a_1 - a_2 - \ldots - a_{p-1}.$$

Dans la seconde phase de l'opération, on a tiré de B, pour les replacer en A, un nombre de dominos

$$q = 13 - y - a_p.$$

Par suite, en ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes :

$$N + q = 13(p+1) - a_1 - a_2 - \ldots - a_p;$$

d'où l'on tire

$$x = 13(p+1) - q - N.$$

La formule précédente s'applique lorsque le jeu se trouve



épuisé en comptant treize, et l'on a $q = 0$; elle s'applique encore si l'on a placé en C une ou plusieurs fois le double blanc. Enfin on observera qu'au lieu de compter jusqu'à 13, on pourra compter jusqu'à 14, 15, ...; il suffit de remplacer dans la formule précédente le nombre 13 par 14, 15, ..., et plus généralement par un nombre quelconque, pourvu que ce nombre soit plus grand que le point le plus fort du jeu de dominos.



DEVINER UN DOMINO PENSÉ.

Faites penser à une personne de la société un domino, ou mieux encore, deux nombres quelconques égaux ou inégaux, parmi les dix nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9;$$

vous pourrez, par une seule question, deviner le domino ou les deux nombres pensés. Cette devinette peut se pratiquer de bien des façons; voici la plus simple. Vous faites doubler le premier point, et ajouter le nombre qu'il vous plaira; puis vous faites quintupler le résultat, et ajouter le second point. Alors, demandez le total.

Pour obtenir les deux numéros pensés, vous diminuez le total de cinq fois le nombre ajouté; la différence obtenue est un nombre de deux chiffres dont le premier correspond au premier nombre pensé, et le second à l'autre point.

En effet, si l'on désigne par x le premier point, par y le second, par a le nombre ajouté, les opérations successives sont repré-

sentées algébriquement par

$$2x,\ 2x+a,\ 10x+5a,\ 10x+5a+y;$$

et si l'on retranche $5a$ du total, il reste $10x+y$.

On peut deviner de la même manière trois chiffres pensés, en faisant effectuer successivement les opérations précédentes, puis les suivantes : Doubler le total et ajouter un nombre b

$$20x+10a+2y+b;$$

quintupler le résultat obtenu, et ajouter le troisième chiffre pensé

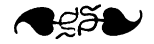
$$100x+10y+z+50a+5b.$$

Demandez alors le résultat; si vous en retranchez le nombre $50a+5b$, il reste

$$100x+10y+z,$$

c'est-à-dire le nombre du système décimal dont les centaines représentent le premier chiffre pensé, les dizaines le second, et les unités le troisième.

Il peut sembler curieux que par une seule question on puisse deviner trois nombres pensés, puisque l'on n'a qu'une seule équation pour trois inconnues. C'est un exemple des plus simples de l'analyse indéterminée, car l'équation obtenue n'a qu'une seule solution dans ce cas. Plus généralement, on pourra opérer dans un système de numération à base quelconque, ou même dans un système à bases multiples, car, dans ces divers systèmes, un nombre quelconque ne peut être représenté que d'une seule manière par des chiffres pris avec le même signe.

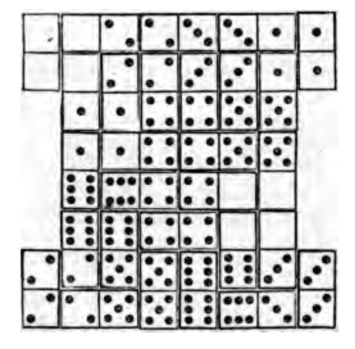




LES QUADRILLES.

On peut ranger les vingt-huit dominos dans des dispositions telles que les points égaux se trouvent placés quatre par quatre aux sommets de carrés. Ces figures, que nous appellerons les *Quadrilles de dominos*, sont formées d'une première rangée horizontale contenant quatre carrés de quatre points, puis de deux rangées contenant chacune trois carrés, et enfin d'une rangée de quatre carrés. Elles sont renfermées dans un périmètre qui possède deux axes de symétrie; en d'autres termes, ces figures se composent de deux parties que l'on peut appliquer l'une sur

Fig. 12.



l'autre, soit par un pli horizontal, soit par un pli vertical; mais il n'en est pas de même lorsque l'on considère comme partie intégrante de la figure les lignes de séparation qui forment les bords des dominos. Cependant la figure précédente, abstraction faite des points qu'elle contient, possède la symétrie autour d'un



axe vertical, c'est-à-dire qu'on peut faire coïncider les deux parties de la figure, en appliquant la partie de droite sur celle de gauche.

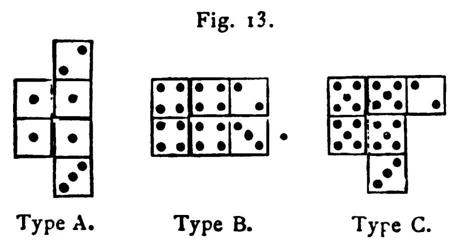
Il y a donc lieu de se proposer de trouver toutes les dispositions possibles des vingt-huit dominos, par carrés de quatre points égaux, que l'on peut renfermer dans le périmètre que nous venons d'indiquer. Pour résoudre cette question, nous nous servirons des nombreux et importants renseignements qui nous ont été fournis par M. Delannoy, sous-intendant militaire de 1[re] classe, à Angoulême.



LES CADRES.

Nous observerons d'abord que pour former un carré de quatre points égaux, il faut nécessairement employer trois ou quatre dominos. Lorsque l'on prend trois dés, l'un d'eux est un double, et si l'on ne tient pas compte de l'orientation, les trois dominos forment, comme il est facile de le voir, trois configurations différentes, A, B, C (*fig.* 13), que nous appellerons *types*.

Fig. 13.



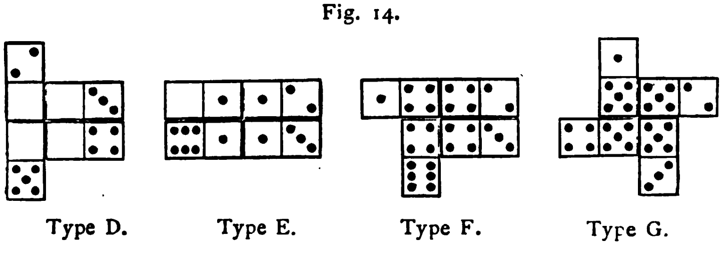
Type A. Type B. Type C.

Les types de carrés à trois dés.

Lorsque l'on emploie quatre dés, ceux-ci forment, sans tenir

compte de l'orientation, quatre configurations différentes : D, E, F, G (*fig.* 14).

Fig. 14.



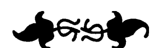
Type D. Type E. Type F. Type G.

Les types de carrés à quatre dés.

D'après cela, il est facile de voir que la forme même du périmètre de la *fig.* 12 est telle que les quatre carrés qui forment les coins ou les sommets du périmètre appartiennent nécessairement au type C; en d'autres termes, les dés des quatre coins sont des doubles. Cela posé, il faut d'abord déterminer la disposition géométrique des dominos, ou plutôt de leurs bords, indépendamment de la valeur numérique attribuée aux points égaux des quatorze carrés; c'est cette disposition que nous appellerons un *cadre*. Sans tenir compte de ceux que l'on obtient par retournement ou par symétrie, on trouve que les cadres du premier périmètre peuvent affecter quatre formes différentes. Nous engageons le lecteur à reproduire sur une feuille de papier les divers cadres formés par les bords des dominos, en grandeur naturelle, en ayant le soin d'indiquer par des hâchures, ou par une couleur quelconque, la place des sept doubles. Alors il deviendra très facile de se rendre compte des diverses formes des quadrilles renfermés dans un même cadre.

Les *fig.* 12, 15, 16, 17 représentent, en faisant abstraction des

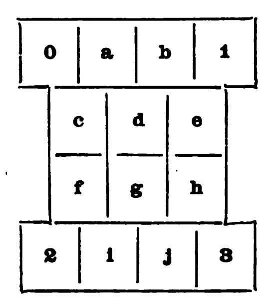
points des dominos, et en indiquant la place des sept doubles, les quatre cadres différents que l'on peut obtenir avec le même périmètre. On observera que le premier cadre est symétrique par rapport à un axe horizontal, et le deuxième par rapport à un axe vertical ; le troisième cadre et le quatrième cadre sont dissymétriques.



NOTATION DES QUADRILLES.

Pour représenter les diverses solutions simples des quadrilles de dominos, nous nous servirons d'un tableau indiquant la position respective des quatorze carrés de points dans l'ordre suivant :

Fig. 15.



La Notation.

Les quatre coins seront toujours désignés par **0**, **1**, **2**, **3** ; la première des lettres **a**, **b**, **c**, **d**, ..., qui n'est pas **0**, **1**, **2** ou **3** sera désignée par **4** ; la suivante sera désignée par 5, et le dernier



point par 6. Ainsi la *fig.* 12 a, dans le premier cadre, la notation :

0-2-3-1
1-4-5
6-4-0
2-5-6-3

Lorsque le cadre est symétrique, comme le premier, on obtiendrait une nouvelle disposition en lisant les points de droite à gauche, mais en leur donnant les signes conventionnels ; ainsi la notation précédente écrite dans l'ordre inverse

1-3-2-0		**0-2-3-1**
5-4-1		**4-5-0**
0-4-6	devient	**1-5-6**
3-6-5-2		**2-6-4-3**

Mais nous ne compterons la première notation et sa symétrique que pour une solution simple.

Pour le deuxième cadre, on obtient une solution symétrique en renversant l'ordre des lignes horizontales ; mais nous ne compterons encore les deux solutions que pour une seule, et nous ne conserverons que la solution qui est désignée par la notation la plus petite dans l'ordre **abcdefghij**.



TABLEAU DES SOLUTIONS SIMPLES.

Après une discussion approfondie qui ne pourrait trouver ici sa place, M. Delannoy a formé le tableau des solutions simples pour les cadres représentés dans les *fig.* 12, 16, 17 et 18.

Fig. 16.

Fig. 17.

Le *premier cadre*, symétrique par rapport à un axe vertical (*fig.* 12) renferme **huit** solutions simples :

0-2-3-1	0-2-4-1	0-2-4-1	0-2-4-1
1-4-5	1-3-5	1-5-6	1-5-6
6-4-0	6-4-0	3-4-0	3-5-0
2-5-6-3	2-5-6-3	2-6-5-3	2-6-4-3

0-2-4-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
3-5-0	1-3-2	1-6-2	1-6-2
1-5-6	6-5-0	3-5-0	3-6-0
2-6-4-3	2-4-6-3	2-4-6-3	2-4-5-3



Le *deuxième cadre,* symétrique par rapport à un axe horizontal (*fig.* 16), donne **quatre** solutions simples :

0-2-3-1	0-2-3-1	0-3-2-1	0-3-4-1
4-5-0	4-5-4	4-5-0	5-6-0
6-5-6	6-5-6	6-5-6	4-6-2
2-1-4-3	2-1-0-3	2-4-1-3	2-5-1-3

Le *troisième cadre*, dissymétrique (*fig.* 17), donne **quatorze** solutions simples :

0-2-3-1	0-2-3-1	0-2-4-1	0-2-4-1	0-3-2-1
1-4-5	1-4-5	1-3-5	1-3-5	4-5-0
6-4-0	6-4-6	6-4-0	6-4-6	6-5-6
2-5-6-3	2-5-0-3	2-5-6-3	2-5-0-3	2-4-1-3

0-3-4-1	0-3-4-1	0-4-2-1	0-4-3-1	0-4-5-1
5-6-0	5-6-0	5-3-0	1-5-2	1-3-2
4-5-2	4-6-2	6-4-6	6-5-0	6-5-0
2-6-1-3	2-5-1-3	2-5-1-3	2-4-6-3	2-4-6-3

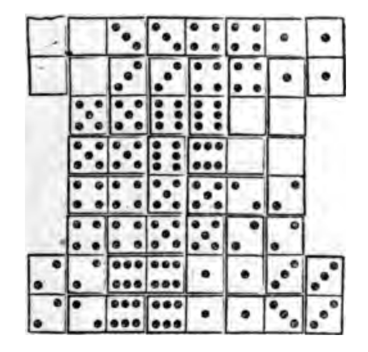
0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
3-6-0	3-6-0	6-3-0	6-3-0
5-4-2	5-6-2	5-4-2	5-6-2
2-6-1-3	2-4-1-3	2-6-1-3	2-4-1-3

Le *quatrième cadre,* dissymétrique (*fig.* 18), renferme **huit** solutions simples :

0-3-4-1	0-3-4-1	0-4-3-1	0-4-3-1
5-6-0	5-6-5	5-6-0	5-6-5
4-5-2	4-0-2	4-1-2	4-1-2
2-6-1-3	2-6-1-3	2-6-5-3	2-6-0-3

0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
6-3-0	6-3-0	6-3-6	6-3-6
4-1-2	5-6-2	4-1-2	5-0-2
2-5-6-3	2-4-1-3	2-5-0-3	2-4-1-3

Fig. 18.







LA MULTITUDE DES QUADRILLES.

Les tableaux précédents renferment les *trente-quatre* solutions simples obtenues par M. Delannoy. Ce problème avait été traité antérieurement par M. Laquière, mais les notes rédigées sur ce sujet ont été perdues pendant le siège de Strasbourg. Ce nombre se réduirait beaucoup, si l'on ne faisait pas attention à la forme intérieure des cadres, attendu que l'on rencontre dans les tableaux précédents plusieurs solutions qui ont une notation commune.

En adoptant le nombre de 34 solutions simples, il est évident que l'on peut échanger dans chacune d'elles deux points quelconques, les deux avec les cinq, ou les as avec les blancs, etc.; plus généralement, remplaçons les chiffres de la notation

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

par les sept points

5, 3, 0, 1, 2, 6, 4,

pris dans un ordre quelconque ; nous obtiendrons ainsi des quadrilles différents. Chaque solution simple permet donc autant de quadrilles qu'il y a de manières de disposer sept objets différents en ligne droite. C'est précisément le nombre des permutations rectilignes de sept objets, ou

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040.$$

En faisant le produit de 5040 par le nombre 34 des solutions simples, et en doublant le résultat, pour tenir compte des solu-



tions obtenues par symétrie, ou par réflexion dans un miroir, on trouve au total

342 720

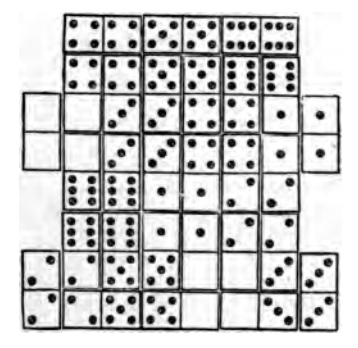
quadrilles différents pour le périmètre considéré.



LA VARIÉTÉ DES PÉRIMÈTRES.

Au lieu de ranger les dominos en quadrilles, suivant le périmètre que nous avons considéré (*fig.* 12, 16, 17 et 18), on peut se proposer de résoudre le même problème pour d'autres périmètres. Ainsi le périmètre de la *fig.* 19 ne donne qu'un seul

Fig. 19.

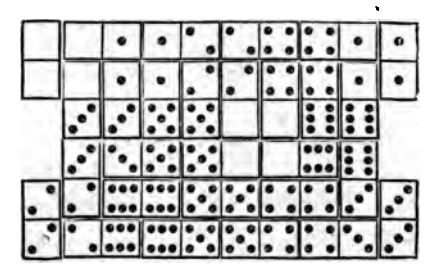


cadre, possédant un axe vertical de symétrie; ce cadre ne donne d'ailleurs qu'une seule solution que nous avons représentée dans la même figure.

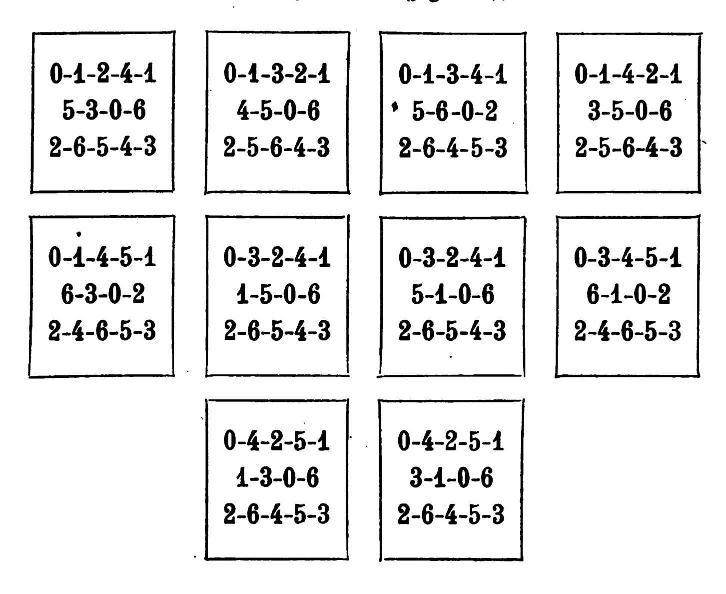
Les *fig.* 20 et 21 représentent deux nouveaux cadres de même périmètre. M. Delannoy a étudié toutes les solutions simples

de ces figures. De plus, il a démontré qu'il n'existe que deux autres cadres du même périmètre; mais ceux-ci ne donnent pas de solutions.

Fig. 20.



Le sixième cadre qui possède un axe vertical de symétrie donne, avec la solution représentée (*fig.* 20), les **dix** autres :



0-1-2-4-1
5-3-0-6
2-6-5-4-3

0-1-3-2-1
4-5-0-6
2-5-6-4-3

0-1-3-4-1
5-6-0-2
2-6-4-5-3

0-1-4-2-1
3-5-0-6
2-5-6-4-3

0-1-4-5-1
6-3-0-2
2-4-6-5-3

0-3-2-4-1
1-5-0-6
2-6-5-4-3

0-3-2-4-1
5-1-0-6
2-6-5-4-3

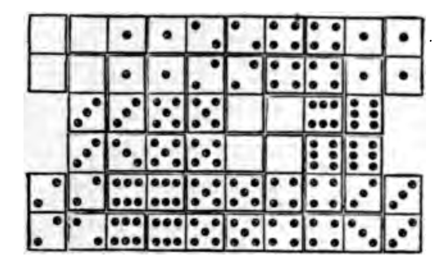
0-3-4-5-1
6-1-0-2
2-4-6-5-3

0-4-2-5-1
1-3-0-6
2-6-4-5-3

0-4-2-5-1
3-1-0-6
2-6-4-5-3

Quant au septième cadre (*fig.* 21), il donne **huit** solutions.

Fig. 21.



Les notations de ces solutions sont, en plus de celle qui correspond à cette figure, identiques avec la première et les six dernières du tableau précédent.

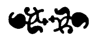


DISPOSITIONS RECTILIGNES.

On peut se proposer de déterminer le nombre des dispositions rectilignes suivant lesquelles on peut ranger tous les dés d'un jeu complet de dominos, en suivant la règle ordinaire. Ce problème a été énoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. VIII, p. 74), et résolu par Reiss ([1]). La règle du jeu exige que deux dés consécutifs se touchent par des points équivalents. De là, on conclut que l'élément initial est le même que l'élément final; en

([1]) *Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les* 28 *dés d'un jeu du domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu*, par feu Dr M. Reiss. à Francfort. (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. V, p. 63-120. — Milan, 1871.)

d'autres termes, si le tableau commence par un cinq, il se terminera nécessairement par un cinq, à la condition de ne pas fermer le jeu sans avoir employé tous les dominos. En effet, toute combinaison rectiligne des vingt-huit dés étant conforme à la règle, ne cessera pas de l'être, si l'on écarte les doubles. Cette réduction faite, chaque point fera partie de six dominos, puisqu'il est combiné successivement avec chacun des six autres; par conséquent, le point initial doit se rencontrer encore en cinq autres endroits de la combinaison. Mais, dans l'intérieur de celle-ci, chaque point se présente deux fois de suite; d'abord comme seconde partie d'un dé, puis comme première du dé suivant; l'élément initial ne pourra donc s'y rencontrer que quatre fois, et devra finalement se trouver à un endroit où il ne sera pas suivi de lui-même, c'est-à-dire à l'autre extrémité de la combinaison.



SIMPLE AMUSETTE.

On observera que la démonstration précédente s'applique à tous les jeux de dominos qui se terminent au double-quatre, au double-six, au double-huit, et en général à un *double pair*. On démontrerait de la même manière qu'il ne pourrait en être ainsi lorsque le jeu se termine au double-trois, au double-cinq, au double-sept, et en général à un *double impair*. Dans ce cas, on ne peut plus former de dispositions rectilignes suivant la règle en se servant de tous les dés (1).

(1) Lorsque le jeu de dominos se compose de toutes les combinaisons complètes des points de 0 à $(2n-1)$, chacun des points, *à l'exclusion des doubles*, se trouve répété $(2n-1)$ fois. Donc, aussitôt qu'un point différent

De même, si l'on enlève du jeu ordinaire (ou plus généralement d'un jeu qui se termine à un double-pair) un dé quelconque, pourvu que ce ne soit pas un double, le *trois-cinq* par exemple, la disposition rectiligne formée avec tous les autres dés, en suivant la règle, sera terminée à l'une de ses extrémités par un *trois*, et à l'autre par un *cinq*. On déduit de ce résultat une amusette assez intéressante.

Retournez tous les dés d'un jeu de dominos, en ayant le soin d'escamoter un dé non doublé. Dites ensuite à une personne de tirer un dé au hasard et de le faire voir, puis de retourner successivement les autres dominos pour les disposer au fur et à mesure suivant la règle, sans fermer le jeu et sans tenir compte des doubles. Vous lui prédirez alors les deux extrémités de la combinaison, d'après les points du domino que vous avez escamoté. Si la personne ne connaît pas ce divertissement, vous l'intriguerez

du point initial aura été répété $(2n-1)$ fois, il sera impossible de placer un nouveau domino, puisqu'il n'y aura plus de domino contenant ce point. Quant au point initial, il pourra être répété $(2n-1)$ fois, sans fermer le jeu. Par suite, le nombre maximum de points que l'on peut placer d'après les règles du jeu, à l'exclusion des doubles, comprendra deux points, les points extrêmes, répétés $(2n-1)$ fois, et les autres points, en nombre $(2n-2)$, répétés $(2n-2)$ fois; ce nombre maximum sera donc

$$2(2n-1)+(2n-2)^2;$$

le nombre maximum des dominos composant la disposition rectiligne est la moitié du précédent, ou

$$2n^2-2n+1.$$

Le nombre total des dominos étant, sans les doubles, égal à $n(2n-1)$, il reste toujours un *talon* contenant au moins $(n-1)$ dominos.

Il n'y a d'exception que pour $n=1$, c'est-à-dire dans le cas où la disposition rectiligne ne comprend que le seul domino blanc-as.

(*Note de M. Delannoy.*)

beaucoup en ayant l'air de faire un calcul compliqué, au moment où elle vous montrera le premier domino qu'elle aura tiré.

Si vous replacez adroitement le dé que vous avez escamoté, en faisant le mélange des dominos, vous pourrez facilement recommencer l'amusette; mais alors suivez le précepte de Bachet : « J'admoneste ceux qui voudront mettre ces jeux en usage et d'en avoir du contentement, qu'ils prennent le soin de les faire avec une telle dextérité qu'on n'en puisse pas aisément découvrir l'artifice; car ce qui ravit les esprits des hommes, c'est un effet admirable dont la cause leur est inconnue. C'est pourquoi, si l'on fait plusieurs fois de suite le même jeu, il faut toujours y apporter quelque diversité. »



LE MÉMOIRE DE REISS.

Pour déterminer le nombre des dispositions rectilignes, Reiss considère, dans son Mémoire, les combinaisons *circulaires*. Pour les obtenir, on peut partir d'une disposition rectiligne quelconque, que l'on replie sur elle-même de manière à ce que les dés placés aux deux extrémités viennent se toucher par leurs parties extérieures. Dans ces combinaisons circulaires, tous les points se présenteront deux fois de suite, à trois reprises différentes. Elles ne possèdent plus de dés extrêmes, et l'on peut regarder chaque dé comme initial. Mais, de plus, comme dans les dispositions rectilignes, on doit tenir compte du sens, soit de droite à gauche, soit de gauche à droite, dans lequel les dominos se succèdent.

Lorsque l'on a obtenu une combinaison circulaire quelconque ne contenant aucun double, on peut y intercaler chacun d'eux à trois places différentes; si donc C désigne le nombre des combinaisons circulaires distinctes ne contenant aucun double, l'adjonction d'un premier double, du double-blanc par exemple, donnera trois fois plus de combinaisons distinctes, ou 3 C; de même l'adjonction d'un nouveau double, le double-as, triplera le nombre précédent, et ainsi de suite. Par conséquent, le nombre des combinaisons circulaires avec doubles s'obtient en triplant sept fois de suite le nombre des combinaisons circulaires desquelles les doubles sont exclus; ce nombre est donc 3^7C ou 2187 C.

Considérons maintenant l'une quelconque de ces combinaisons circulaires de 28 dominos; en choisissant successivement chacun des 28 dés qu'elle contient comme initial, il en résultera 28 com-

binaisons rectilignes distinctes; d'où l'on conclut que le nombre total de ces derniers équivaut à $28.3^7.C$. La question est ainsi ramenée, par Reiss, à trouver le nombre de dispositions circulaires qui ne contiennent aucun double.

Les développements de l'auteur comportent 58 pages in-4°, parmi lesquelles on trouve de nombreux tableaux numériques; nous n'avons pu vérifier ces calculs, trop compliqués pour être intéressants; la question reste entière, car l'important, ce serait de trouver une formule indépendante ou une équation de récurrence qui donnerait le nombre des dispositions pour un jeu de dominos se terminant à un double pair quelconque. Quoi qu'il en soit, nous indiquerons les résultats de l'analyse du docteur Reiss.

Le nombre C des combinaisons circulaires serait

$$129\ 976\ 320,$$

celui des combinaisons rectilignes

$$7\ 959\ 229\ 931\ 520,$$

et l'on devrait diviser par deux ces deux nombres, si l'on ne tenait pas compte du sens (¹).

(¹) Les nombres donnés par le docteur Reiss sont exacts. MM. Tarry et Jolivald ont obtenu les mêmes résultats par deux méthodes complètement différentes.



JUSQU'AU DOUBLE-QUATRE.

Nous allons indiquer une autre méthode du dénombrement des combinaisons rectilignes, sans passer par les dispositions circulaires, mais en supposant que le jeu se termine au double-quatre. Comme dans la méthode de Reiss, nous supprimons les cinq doubles 00, 11, 22, 33, 44; il suffira ensuite de multiplier le nombre des dispositions rectilignes distinctes par 3.2^4 ou 48.

De plus, nous considérons comme distinctes deux combinaisons rectilignes qui ne diffèrent que par l'ordre de succession des dés, en les disposant soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. Si l'on écrit, dans le sens ordinaire, de gauche à droite, les points des dominos d'une disposition rectiligne, chaque point se trouvera répété deux fois consécutivement, à l'exception du premier et du dernier; pour simplifier, nous n'écrirons qu'une fois deux points consécutifs, et nous supprimerons le dernier point égal au premier. Par suite, la *notation* d'une disposition rectiligne sera formée d'une suite de dix chiffres contenant deux fois chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, 4; de plus, le voisinage de deux chiffres quelconques tels que 1 et 3 devra se présenter une fois et une seule, en considérant comme voisins le premier et le dernier chiffre.

Ainsi, par exemple, la notation

0 1 2 0 3 1 4 2 3 4

représente une disposition rectiligne formée successivement par blanc-as, as-deux, deux-blanc, ..., trois-quatre, quatre-blanc. Il est évident que d'une disposition rectiligne, on peut en déduire un certain nombre d'autres en permutant d'une manière quel-

conque les points 0, 1, 2, 3, 4, 5; mais les dispositions obtenues ainsi ne seront pas toujours distinctes.

Il y a donc lieu de rechercher les solutions *élémentaires*, c'est-à-dire toutes les solutions qui permettent d'obtenir toutes les autres par permutation des éléments 0, 1, 2, 3, 4. Par un numérotage de convention, nous pouvons toujours désigner par 0 le premier point, par 1 le suivant, de telle sorte que le premier domino sera 01. Le point suivant sera désigné par 2, et les trois premiers chiffres de la solution élémentaire sont nécessairement 012.

Le quatrième point peut être égal au premier, ou représenter un point nouveau que nous désignerons par 3; en continuant cette discussion on trouve assez facilement les *vingt-deux* notations suivantes, rangées dans l'ordre numérique :

I	0120314234	XII	0123140342
II	0120314324	XIII	0123142034
III	0120324134	XIV	0123142043
IV	0120324314	XV	0123143024
V	0120341324	XVI	0123143042
VI	0120342314	XVII	0123402413
VII	0123024134	XVIII	0123403142
VIII	0123024314	XIX	0123413024
IX	0123041342	XX	0123413042
X	0123043142	XXI	0123420314
XI	0123140243	XXII	0123420413.

Si l'on renverse l'ordre des chiffres de l'une quelconque de ces notations, en donnant aux points le numérotage de convention que nous avons indiqué, on retombe nécessairement sur l'une de ces notations; mais on doit distinguer deux cas. Dans le premier cas, la notation retournée et numérotée reproduit la même

notation; nous dirons alors que cette solution est *symétrique*. Dans le second cas, on en reproduit une autre; nous dirons alors qu'elle est *dissymétrique*.

Les notations symétriques sont au nombre de *six*, savoir :

I, IV, XI, XVI, XX, XXII;

les notations dissymétriques de rangs

II, V, VI, IX, X, XII, XVII, XVIII

ont respectivement pour inverses

III, VII, VIII, XIII, XV, XIV, XXI, XIX.

Cela posé, il est facile de déterminer la multitude des combinaisons rectilignes distinctes, sans tenir compte des doubles. Le nombre des permutations de cinq objets est égal à

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \quad \text{ou} \quad 120.$$

Toute notation symétrique donne 120 dispositions distinctes; toute notation dissymétrique et son inverse donnent 240 dispositions distinctes : donc, au total,

$$(6 + 2.8)\ 120 \quad \text{ou} \quad 2640.$$

Par suite, le nombre total des dispositions rectilignes du jeu de dominos terminé au double-quatre est

$$2640 \times 48 \quad \text{ou} \quad 126720.$$

En développant cette méthode, on arriverait assez facilement à une autre solution du problème de Reiss.

Nous indiquerons dans la Note I, à la fin de ce volume, les relations qui existent entre le jeu de dominos et le jeu des ponts et des îles.



TROISIÈME RÉCRÉATION.

—

LES JEUX DE MARELLE.

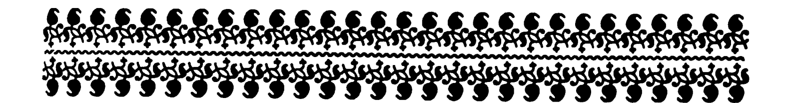
A Monsieur Gaston Marquiset, député de la Haute-Saône.

Pourquoi jouons-nous ici-bas
Ce vieux drame toujours le même ?

(CAZALIS, *L'Illusion.*)

Je marque mon jeton à ce jeu de la vie où nous perdons coup sur coup et où le diable, pour en finir, rafle joueurs, dés et tapis vert.

(ALOYSIUS BERTRAND, *Gaspard de la Nuit.*)



TROISIÈME RÉCRÉATION.

—

LES JEUX DE MARELLE.

HISTORIQUE.

Les anciens ont connu trois sortes de jeux, dont la théorie appartient aux Mathématiques : les uns, tels que les jeux de *Dés*, d'*Osselets*, etc., sont des jeux de hasard, et leur théorie repose sur le Calcul des probabilités. Platon [1] attribue leur invention au dieu égyptien Theut, tandis qu'Hérodote en fait remonter l'origine aux Lydiens qui, pendant une longue et cruelle disette, imaginèrent la plupart des jeux pour tromper les souffrances de la faim. D'autres, que les Grecs appelaient jeux de *pessos*, tels que la *Marelle*, la *Pettie*, et en général les divers jeux de combinaisons dont les transformations successives ont

[1] « J'ai entendu dire qu'aux environs de Naucratis d'Égypte exista un des plus anciens dieux, celui auquel est consacré l'oiseau qu'on appelle Ibis; que son nom est Theut, et que le premier il avait découvert le Nombre, le Calcul, la Géométrie, l'Astronomie, les Dames et les Dés. »

PLATON, *Phèdre*.

dû donner naissance aux jeux de *dames* et d'*échecs*, ne dépendent pas du hasard, mais seulement du nombre et de la position; ils étaient déjà connus à l'époque des premiers calculs astronomiques des Égyptiens. Nous avons donné plus haut quelques indications sur l'origine du jeu de dames. Ces jeux apparaissaient souvent sur les tombeaux avec une signification symbolique; tantôt ils exprimaient le côté aléatoire de la vie humaine, tantôt le bonheur parfait des sages et des justes dans l'autre monde. Ainsi encore, d'après une antique tradition, Hérodote nous montre aux enfers le roi Rhampsinite jouant aux dames avec Cérès.

Enfin, les anciens connaissaient d'autres jeux tenant à la fois du hasard et des combinaisons, comme le jeu de *tric-trac* que les Romains appelaient *Ludus duodecim scriptorum* ou *Jeu des douze lignes*. Il paraît avoir été connu en Perse à une époque extrêmement reculée; on l'appelait *Nerd*, du nom d'un petit cylindre allongé ayant la forme de la tour des échecs. Dans son traité des *Jeux orientaux*, Hyde rapporte, en effet, que les peuples de l'Asie ont l'habitude de se servir de pièces cylindriques tenant lieu de nos dames. D'autre part, Plutarque nous apprend que Parysatis, mère d'Artaxerxès, était très habile à ce jeu.



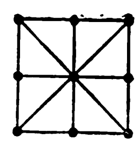
LA MARELLE SIMPLE.

Qui de nous n'a joué à la marelle, ce jeu connu de tous les enfants? Il suffit de tracer quelques lignes sur le sol, de ramasser trois cailloux blancs et trois cailloux noirs pour improviser une partie de marelle. Ce jeu est encore très répandu dans tout l'Orient

sous le nom de *Jeu des trois routes*. On en trouve la première mention certaine dans les œuvres d'Ovide, qui en a parlé deux fois en termes identiques [1] : « Ce jeu se joue sur une petite table spéciale au moyen de trois pièces pour chaque joueur ; pour gagner, il faut amener ses trois pièces sur une même ligne. »

La *Marelle* ou la *Mérelle* est représentée dans la *fig.* 22. Elle

Fig. 22.



La Marelle simple.

est formée par les quatre côtés d'un carré, ses deux diagonales et les deux lignes médianes parallèles aux côtés ; les points d'intersection de ces huit lignes forment *neuf* cases. La marelle se joue à deux ; les deux joueurs possèdent chacun trois pions, les uns blancs, les autres noirs, et les posent alternativement sur les cases, dans l'ordre désigné par le sort, ou, suivant convention, par le gain de la partie précédente. Lorsque tous les pions sont posés, chacun des joueurs, à tour de rôle, peut les déplacer sur une case immédiatement voisine, à la condition de suivre l'une des lignes tracées sur la figure. La partie est gagnée par le joueur qui arrive à placer le premier ses trois pions sur une même ligne horizontale, verticale ou diagonale.

Les combinaisons de ce jeu sont peu nombreuses ; nous allons faire voir que le joueur qui pose le premier gagne nécessairement

[1] Ovide, *Tristes*, II, 481. — *Art d'aimer*, III, 365.

la partie, par une tactique convenable, en plaçant le premier pion au centre de la marelle. Dès lors, la marelle n'est plus qu'un jeu de hasard, si le sort décide toujours de la pose. Il n'en est plus de même, si l'on convient à l'avance que le premier joueur n'a pas le droit de poser, au début, sur le centre de la marelle.

Afin d'étudier les diverses péripéties de la bataille, nous nous servirons des dénominations suivantes :

Le joueur qui joue le premier est désigné par B (*Blancs*), et le second est désigné par N (*Noirs*).

Les neuf cases de la marelle sont désignées, d'après leur succession comme dans la page d'un livre, par

1, **2**, **3**,
4, **5**, **6**,
7, **8**, **9**.

La case **5** est le *centre;* les cases **1**, **3**, **7**, **9** sont les *coins;* les cases **2**, **4**, **6**, **8** sont les *milieux*.

Tout coin a deux coins *voisins*, un coin *opposé;* ainsi le coin **1** a **3** et **7** pour voisins, et **9** pour coin opposé. Tout coin a deux milieux voisins et deux milieux opposés ; ainsi le coin **3** a **2** et **6** pour milieux voisins, **4** et **8** pour milieux opposés.

Tout milieu a deux coins voisins, et deux coins opposés; ainsi le milieu **8** a **7** et **9** pour coins voisins, **1** et **3** pour coins opposés. Tout milieu a deux milieux voisins, et un milieu opposé; par exemple, le milieu **4** a pour milieux voisins **2** et **8**, et **6** pour milieu opposé.

Cela posé, nous étudierons successivement les deux parties suivantes, selon que le premier joueur B pose le premier pion sur le centre de la marelle, ou sur une autre case.

PREMIÈRE PARTIE.

Le premier joueur B gagne toujours la partie, en jouant convenablement, s'il a le droit de poser au centre de la marelle. Deux cas peuvent se présenter suivant que le second joueur N place son premier pion sur un coin ou sur un milieu.

Premier cas. — Le premier joueur B occupe le centre **5**, le second joueur N pose un premier pion sur un coin. Il résulte évidemment de la symétrie de la marelle, que l'on peut toujours supposer que le joueur N s'est placé en **1**. — Les blancs posent leur deuxième pion au milieu opposé, en **8**; les noirs, pour ne pas perdre immédiatement la partie, se trouvent forcés de placer leur deuxième pion en **2**. — Au troisième coup, les blancs posent nécessairement sur la case **3**, et, pour la même raison, les noirs sont obligés de jouer sur la case **7**. — Les six pions se trouvant placés, les blancs jouent **8** en **9**, puis **5** en **6**, occupent les trois cases **3**, **6**, **9**, d'une même ligne, et gagnent la partie.

Pour résumer la partie gagnée par les blancs, nous la présenterons sous la forme suivante :

B	5	8	3′	89	56	V.
N	1	2′	7′	—	—	

La première ligne B indique par un chiffre la pose, puis par deux chiffres la marche des blancs; la seconde ligne N donne la pose et la marche des noirs. L'accent veut dire que le coup est forcé, sinon la partie est gagnée par l'adversaire, à la pose suivante; le trait — veut dire que les noirs ont perdu, quelle que soit leur tactique. La lettre V indique la victoire; elle est placée dans la ligne des vainqueurs.

Deuxième cas. — Le premier joueur B occupant le centre 5, le second joueur N pose son premier pion sur un milieu.

Une discussion analogue à la précédente conduit facilement au tableau :

B	5	1	7′	12	23	V.
N	8	9′	4′	—	—	



DEUXIÈME PARTIE.

Le premier joueur B n'ayant pas la faculté de jouer au centre, le second joueur N y pose son premier pion. Cette partie comporte six cas différents; pour cinq d'entre eux, la partie est gagnée par les noirs, s'ils jouent convenablement; pour la sixième, la partie est nulle, si chacun des partenaires sait déjouer habilement les pièges de l'adversaire.

A cause de la symétrie de la marelle, on peut supposer successivement que les blancs ont posé les deux premiers pions :

I. — Sur deux milieux opposés;
II. — Sur deux milieux voisins;
III. — Sur coin et milieu opposés;
IV. — Sur coin et milieu voisins;
V. — Sur deux coins opposés;
VI. — Sur deux coins voisins.

Premier cas. — Les blancs ont placé les deux premiers pions sur deux milieux opposés; les noirs posent leur premier pion

au centre, et gagnent la partie en quatre coups.

B	2	8	1′	—		
N	5	9	4	96		V.

Deuxième cas. — Les blancs ont posé les deux premiers pions sur deux milieux voisins; les noirs posent leur premier pion au centre, et gagnent en quatre coups.

B	2	6	3′	—	
N	5	7	9	58	V.

Troisième cas. — Les blancs ont joué sur coin et milieu opposés; les noirs gagnent en quatre coups.

B	1	6	3′	—	
N	5	7	2	78	V.

Quatrième cas. — Les blancs ont posé sur coin et milieu voisins; les noirs gagnent en quatre coups.

B	1	2	7′	—	
N	5	3′	9	56	V.

Cinquième cas. — Les blancs ont joué sur deux coins opposés; les noirs gagnent en quatre coups.

B	1	9	2′	—	
N	5	8	3′	87	V.

Sixième cas. — Les blancs ont posé sur deux coins voisins, 1 et 3, par exemple. On a, au début,

B	1	3	8′
N	5	2′	N′ joue sur un milieu ou sur un coin.

Dans la première hypothèse, à cause de la symétrie, on peut

supposer que les noirs posent en 4; alors les blancs jouent 8 en 7, et les noirs ayant leurs pions enfermés, sont obligés de s'éloigner du centre où B vient se placer, et gagne. Par suite, afin de ne pas perdre, *par fermeture*, les noirs posent au troisième coup sur un coin, d'après la seconde hypothèse.

A cause de la symétrie, on peut supposer que N pose en 7; dans ce cas, B ne pouvant déplacer 3 en 8, car il perdrait en un coup, joue 1 en 4. Alors si N déplace 2, il perd en deux coups par fermeture; il est donc obligé d'abandonner le centre en jouant 5 en 6 ou en 9. Pour continuer la discussion, on dessine les *diagrammes* qui correspondent à chaque coup; pour cela on dessine les deux triangles formés par les positions des trois pions blancs et des trois pions noirs, et l'on considère comme équivalents les diagrammes obtenus en tournant la marelle de un, deux, trois quarts de tour, ainsi que ceux que l'on obtient par symétrie dans un miroir. On reconnaît alors que si les deux joueurs évitent les coups de fermeture, on retombe après plusieurs coups sur un diagramme déjà obtenu; par suite, il y a périodicité, et la partie devenant indéfinie doit être considérée comme nulle.

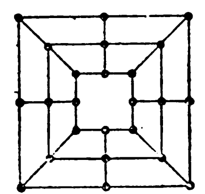
En résumé, si le premier joueur a le droit de poser au centre, il gagne la partie; si le premier joueur ne pose pas au centre, il peut annuler la partie. Pour rendre les chances complètement égales, on pourrait interdire à chacun des joueurs de poser au centre avant le deuxième coup, ou avant le troisième. Mais, dans ces conditions, la partie peut toujours être annulée par chacun des deux joueurs, à moins d'inadvertance.



LA MARELLE TRIPLE.

Nous avons vu plus haut que le jeu de la marelle était et est encore très répandu dans tout l'Orient; la seule différence qui puisse exister chez les divers peuples consiste dans la disposition et le nombre des lignes, des cases et des jetons. Ainsi, dans la marelle triple (*fig.* 23), on compte vingt-quatre cases; chacun des

Fig. 23.



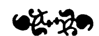
La Marelle triple.

joueurs prend neuf pions, et les place alternativement, comme dans le jeu ordinaire. Lorsque tous les pions sont posés, chacun des joueurs, à tour de rôle, peut les déplacer sur une case immédiatement voisine, à la condition de suivre l'une des lignes tracées sur la figure. Le but est d'amener trois pions sur une même ligne; lorsque l'un des joueurs y parvient, il prend un pion à son choix dans le jeu de son adversaire et la partie continue. Quand l'un des joueurs n'a plus que quatre pions, il peut leur faire franchir, sur une même ligne droite, les stations intermédiaires inoccupées. Aussitôt que l'un des joueurs n'a plus que deux pions, il perd la partie.

Le *Jeu national*, que l'on trouve actuellement chez les marchands de jouets et d'images, ne diffère du précédent que par la

suppression des lignes diagonales aboutissant aux quatre coins du carré. Les règles du jeu restent les mêmes.

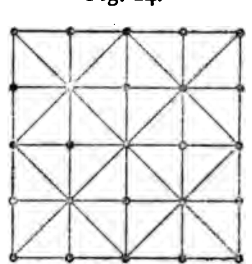
La marelle triple se joue beaucoup dans le royaume de Pologne, en Ukraine, en Podolie et en Wolhynie, sous le nom de *Mlynek*, ou, en français, le *Jeu des Moulins*. Il existe encore dans ces pays un jeu fort répandu et pratiqué surtout par les paysans, sous le nom de *Wisielec* ou le *Jeu des Pendus*. Ce jeu revient à celui de la marelle simple, avec cette différence que l'on peut déplacer un pion quelconque, sans qu'il soit nécessaire de suivre l'une des lignes du tableau (*fig.* 22). Dans ce cas, la partie serait toujours nulle, à moins de remporter la victoire soit par la fatigue, soit par l'inattention de l'adversaire. Nous devons ces renseignements à MM. Marquiset et Mokronoski.



LA MARELLE QUADRUPLE.

Nous donnons (*fig.* 24) une autre modification de la marelle

Fig. 24.



La Marelle quadruple.

que l'on rencontre dans divers ouvrages anciens; la figure se compose de la juxtaposition de quatre marelles simples.

Chacun des joueurs possède cinq pions qu'il pose successivement à tour de rôle; le but est d'arriver à placer le premier ses cinq pions en ligne droite. Si l'on supprime la case centrale, et les lignes diagonales, on obtient une nouvelle figure dont il est question dans le paragraphe suivant. Il est possible que cette marelle ait pu donner naissance au jeu de la pettie.



LA PETTIE DES GRECS.

La *Pettie* est une des nombreuses modifications de la marelle; elle est souvent citée dans les ouvrages de Platon, d'Aristote, de Sophocle, de Plutarque, etc. Bien qu'elle ait été fort goûtée des Grecs, on ne sait pas encore exactement ni la forme de son tablier, ni les règles du jeu. Peut-être sera-t-on fixé plus tard d'une façon beaucoup plus précise, si l'on retrouve une antique table de pettie, et surtout la table même de Palamède qu'on disait avoir été conservée à Troie et transportée à Argos. Quoi qu'il en soit, nous indiquerons, d'après plusieurs ouvrages modernes (1), quelques renseignements qui permettent sinon de reconstituer ce jeu, du moins d'en donner une idée suffisante.

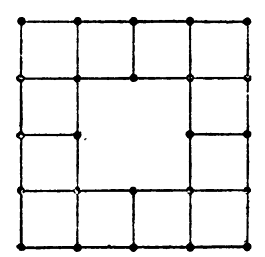
La pettie est représentée dans la *fig.* 25 ; elle est formée de vingt-quatre cases. La partie se joue à deux, au moyen de cinq

(1) CHRISTIE, *An inquiry into the game invented by Palamede*. London, 1801. — BECQ DE FOUQUIÈRES, *Les jeux des anciens, leur description, leur origine, leurs rapports avec la religion, l'histoire, les arts et les mœurs*. Paris, 1869. — C'est à ce dernier ouvrage, fort intéressant, que nous avons emprunté la plupart des renseignements historiques contenus dans cette récréation.



pions blancs et de cinq pions noirs. Au début de la partie, les cinq pions sont posés de chaque côté sur les lignes supérieure et inférieure. Le premier joueur désigné par le sort, ou par le gain d'une partie précédente, avance l'un de ses pions sur la case voisine, èn suivant une ligne de la figure. Puis, chaque joueur déplace successivement l'un de ses pions, en avançant

Fig. 25.



La Pettie des Grecs.

vers l'ennemi, ou en se déplaçant latéralement, *mais sans jamais reculer*. Le but du jeu est d'enfermer une pièce de l'adversaire, de manière qu'elle ne puisse plus bouger; dans ce cas, le joueur qui entoure un ou plusieurs pions de l'adversaire, les enlève du damier et pousse un autre pion. Telle est la restitution, d'après les auteurs que nous avons cités, du jeu de la pettie. Cependant nous devons faire observer que le jeu nous paraît plus intéressant et plus en rapport avec les textes qui ont été conservés, lorsque l'on suppose que les joueurs ont la faculté de reculer devant l'attaque de l'adversaire; sans cette hypothèse, le second joueur pourrait toujours jouer de manière à

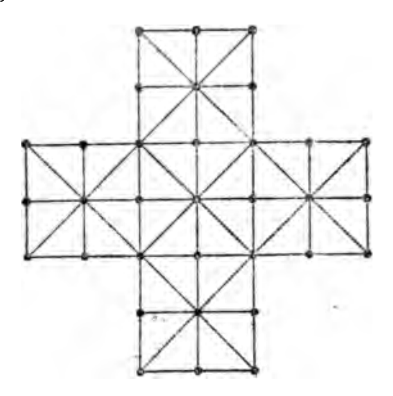
annuler toutes les parties après le neuvième coup, comme il est assez facile de le faire voir.



LE RENARD ET LA POULE.

Le *Jeu du Renard et de la Poule*, que nous représentons dans la *fig.* 26, est une transformation de la marelle et de la pettie;

Fig. 26.



Le Renard et la Poule.

on l'obtient par la juxtaposition de cinq marelles simples. On observera, d'ailleurs, que la disposition des cases est exactement semblable à celle des trente-trois cases du jeu du solitaire que l'on rencontre fréquemment en Allemagne; pour obtenir la figure du solitaire, il suffirait de supprimer les lignes diagonales. Ce jeu était très goûté à la fin du XVIIe siècle; nous



empruntons la description et la méthode d'y jouer à l'auteur anonyme de la *Maison des Jeux académiques :*

Fortune, icy bas tourne-boule,
Tourne choses par le hasard :
Parfois le Renard prend la Poule,
La Poule parfois le Renard.

« Les Lydiens, peuple d'Asie, entre plusieurs jeux qu'ils inventèrent, donnèrent l'origine et l'usage à celui du renard, non tant pour le désir qu'ils eussent de le louer, que pour se façonner aux ruses et se garder des surprises que Cyrus, leur ennemi capital, leur dressait tous les jours, lequel les appelait *Poules,* à cause qu'ils aimaient les délices et le repos; et iceux Lydiens le nommaient *Renard*, à cause qu'il était sans cesse aux aguets, et qu'il cherchait incessamment des finesses pour les surprendre. Ce jeu est ingénieux et récréatif, facile à pratiquer; on le joue sur une figure semblable à celle qui est portraite; il s'en fait de diverses étoffes, mais celle-ci n'est de grands frais et peut servir autant qu'une autre. On y joue avec des dames ou jetons, à faute d'avoir des poules de bois et d'ivoire, en nombre de treize, posées sur treize rosettes ou espaces dont cette table est composée ; les poules sont en la partie d'en bas, et le renard est en la partie d'en haut, qui consiste en vingt rosettes ou espaces, et vous placez en l'une d'icelles le renard à discrétion, qui peut monter et descendre, aller et venir au haut et bas, à droit et travers. Les poules ne peuvent monter que de bas en haut, et ne doivent redescendre; le joueur ne doit laisser les poules découvertes, ou seules, non plus qu'au jeu de dames. La finesse de ce jeu est de bien poursuivre le renard, et l'enfermer en telle sorte qu'il ne puisse aller deçà ni delà. Et est à noter que le renard

prend toutes les poules qui sont seules et découvertes. Enfin il se faut donner garde de laisser venir le renard dans la partie d'en bas parmi les poules, pour autant qu'il les pourrait plus facilement prendre. L'exercice peut beaucoup en ce jeu, et à force de jouer on s'y rend bien maître. Les bons joueurs démarent les poules premier que le renard; celui qui a les poules ne doit permettre, s'il peut, qu'on démare le renard le premier, car cela ne lui est avantageux. »

LE JEU DES LATRONCULES.

Ce jeu des Romains a longuement exercé la patience et la sagacité des érudits et des savants, parmi lesquels on doit citer Saumaise dans son édition des écrivains de l'*Histoire Auguste*, Souterius dans son *Palamède*, Sentfleb et Calgagninus dans leurs *Histoires des jeux de hasard et de combinaison des anciens*, Hyde dans ses *Jeux orientaux*, Christie dans ses *Recherches sur la Pettie*, et Warnsdorff dans son édition des *Petits poètes latins*. Nous empruntons au savant ouvrage de M. Becq de Fouquières les règles de ce jeu, d'après la restitution qu'il en a faite, et qui nous paraît, jusqu'à preuve du contraire, la plus probable et la plus complète.

La table à jouer est un échiquier ordinaire de soixante-quatre cases, alternativement noires et blanches; la partie est jouée par deux adversaires ayant chacun deux sortes de pièces, huit *latroncules* et huit *larrons*. Au début de la partie, les latroncules sont rangés comme les pions du jeu des échecs, sur les mêmes cases,

et les larrons sont placés, de part et d'autre, derrière les latroncules, sur les cases ordinaires des autres pièces du jeu des échecs.

Les latroncules ne peuvent marcher qu'en avant, droit devant eux, et n'avancent jamais que d'une case à la fois; lorsqu'un latroncule arrive à la dernière case de sa colonne, on peut l'échanger contre un larron. Les larrons peuvent marcher dans toutes les directions, parallèlement aux bords ou aux diagonales de l'échiquier, soit en avant, soit en arrière, et franchir en ligne droite plusieurs cases vides; leur marche est semblable à celle de la reine au jeu des échecs.

Une pièce quelconque est en échec, lorsque l'une des pièces de l'adversaire peut venir occuper, dans son déplacement convenu, la case sur laquelle cette pièce est placée. Cependant chaque latroncule peut faire échec dans toutes les directions, sur l'une des cases immédiatement voisines, soit par le côté, soit par le coin de celle qu'il occupe. Une pièce est en prise lorsqu'elle est soumise à un double échec auquel on ne peut la soustraire par un déplacement. Quand un joueur a une pièce en prise, il ne peut la dégager, il joue une autre pièce; l'adversaire, à son tour, enlève cette pièce de l'échiquier et joue ce qu'il veut.

Le but du jeu est de prendre ou de bloquer toutes les pièces de l'adversaire.

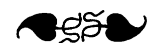


LE JEU DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Depuis quelques années, les élèves de l'École Polytechnique ont imaginé un nouveau jeu de combinaison assez original. Il se joue à deux de la manière suivante : on commence par dessiner

sur un papier quadrillé un carré renfermant vingt-cinq, trente-six, quarante-neuf cases, etc.; les côtés du carré sont tracés à l'encre, et les bords des petits carrés intérieurs restent indiqués au crayon. Cela fait, chacun des joueurs, à tour de rôle, trace à l'encre un côté quelconque de l'un des carrés intérieurs. Lorsque l'un des joueurs parvient par un dernier trait à limiter complètement l'un des carrés, il le compte à son *avoir*, en le marquant au centre d'un signe convenu, par exemple, de l'initiale de son nom. Le joueur qui termine un carré continue à jouer, et peut en prendre ainsi plusieurs successivement. La partie est gagnée par le joueur qui s'empare le premier de plus de la moitié des carrés.

Ce jeu nous a paru assez curieux pour en donner ici la description; mais, jusqu'à présent, nous ne connaissons pas encore d'observations ni de remarques assez importantes pour en dire davantage.



LE DAMIER DE SEIZE CASES.

Si l'on tient compte des résultats que nous avons obtenus, soit par observation, soit par démonstration, on doit en conclure, contrairement à l'opinion d'Edgar Poë, reproduite dans les Préliminaires de notre première récréation, que les jeux de pettie, de dames, de latroncules, d'échecs, etc., ne seraient pour des joueurs parfaitement habiles que des jeux de hasard. Au début de la partie, les deux positions sont absolument égales; mais, lorsque le premier joueur, désigné par le sort, a déplacé l'une de ses pièces, il se produit immédiatement une inégalité qui doit être, à moins de nullité de la partie, fatale à l'un des joueurs. Il en est

de même dans le jeu de l'École Polytechnique. Nous en donnerons un autre exemple sur le ***damier de seize cases***.

Supposons que l'on ait détaché de la *fig.* 1 les seize cases du coin inférieur de gauche, et que l'on ait placé deux pions noirs en 0^0 et 0^2, deux pions blancs en 1^3 et 3^3, on aura ainsi organisé une partie sur un damier de seize cases. Si le trait appartient aux noirs, par exemple, la partie est nulle pour deux bons joueurs, comme cela résulte de ce tableau :

Si les noirs jouaient	0^0 en 1^1,	les blancs joueraient	1^3 en 0^2,	et gagneraient;
» »	2^0 en 3^1,	» »	3^3 en 2^2,	»
» »	2^0 en 1^1,	» »	1^3 en 2^2. — Partie nulle.	

On observera que si, dans le troisième cas, les blancs commettaient la faute de jouer 1^3 en 0^2, ils perdraient la partie.

Dans la partie de *Qui perd gagne*, sur le même damier, le premier joueur perd nécessairement la partie, comme on le voit facilement.

Nous laissons au lecteur patient et ingénieux le soin d'étudier la même partie sur un damier de trente-six cases, chacun des joueurs ayant six pions.



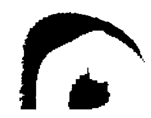
ENTRE CHIENS ET LOUP.

Tout le monde connaît le jeu appelé *Cinq contre un*, ou la *Bataille des renards*, ou encore *Entre chiens et loup*. Sur le damier de cent cases, l'un des joueurs pose sur la première rangée cinq pions blancs sur les cases blanches, ce sont les *chiens*; l'autre

joueur n'a qu'un pion noir qu'il place sur une case blanche quelconque, c'est le *loup*. Le but du jeu est, pour le loup, de franchir la ligne des chiens; pour les chiens, d'empêcher le loup de passer, de le faire reculer et de l'acculer dans un coin du damier. La marche des chiens et du loup est la marche ordinaire des pions au jeu de dames; mais le loup a le privilège de pouvoir reculer quand il lui plaît. La pratique de ce jeu, qui n'est qu'une des nombreuses transformations de la marelle ou de la pettie, nous apprend que les chiens, quand ils sont bien menés, finissent toujours par enfermer le loup, et par gagner la partie. A première vue, la théorie de ce jeu paraît beaucoup plus simple que celle du *Qui perd gagne,* ou *Vingt contre un,* qui fait l'objet de notre première récréation; mais il n'en est rien, et voici la raison.

Dans la partie de vingt contre un, le pion unique, à chaque coup, ne peut choisir que deux cases dans son déplacement, puisqu'il ne peut reculer; de telle sorte qu'il ne peut occuper, après le premier coup, que deux positions; après le deuxième coup, trois positions; après le troisième coup, quatre positions; etc. Dans la partie de *Cinq contre un*, le loup peut avancer ou reculer, et, par suite, peut occuper, après le premier coup, quatre positions; neuf, après le deuxième, etc.; de telle sorte que, dans cette dernière partie, le nombre des combinaisons à étudier est plus considérable.





MÉTHODE DE M. DELANNOY.

Pour démontrer que les chiens finissent toujours par acculer le loup, nous exposerons la tactique de M. Delannoy. Elle revient à faire voir que si les chiens occupent une ligne du damier, à un moment quelconque de la lutte, et en particulier au début, ils peuvent reformer leur ligne de défense après *cinq* coups, ou après *dix*, quelles que soient d'ailleurs les embûches du loup et ses diverses attaques.

Nous supposerons d'abord que les chiens sont placés sur la première ligne d'exposant zéro, dans le damier numéroté d'après le système de Vandermonde (*fig.* 1); de plus, nous admettrons que les chiens se déplacent les premiers, en courant sur le loup. Cela posé, celui-ci peut occuper un certain nombre de positions que nous classerons comme il suit:

Première embûche. — Le loup est sur une case d'exposant égal à 3, ou plus grand que 3.

Deuxième embûche. — Le loup est sur une case d'exposant 2, mais à droite de l'axe vertical du damier, en 6^2 ou en 8^2.

Troisième embûche. — Le loup est sur une case d'exposant 1, à droite de l'axe vertical du damier, en 5^1, en 7^1 ou en 9^1.

Quatrième embûche. — Le loup est sur une case d'exposant 2, à gauche de l'axe vertical du damier, en 0^2, en 2^2 ou en 4^2.

Cinquième embûche. — Le loup est sur une case d'exposant 1, à gauche de l'axe vertical du damier, en 1^1 ou en 3^1.

Nous allons montrer successivement que dans le cas des trois premières embuscades, les chiens reforment leur ligne de défense après cinq coups, et que, dans les deux autres, ils peuvent la

rétablir après dix coups, au plus. En conséquence, le loup est forcé, dans tous les cas, de fuir devant les chiens.



PREMIÈRE EMBÛCHE.

Supposons, par exemple, que le loup soit embusqué en 3^3. On lance un chien, à droite, de 2^0 en 3^1, qui vient se placer en face du loup dans la case de même colonne. Si le loup s'éloigne, les chiens reforment facilement leur ligne de défense; si le loup vient attaquer en 2^2, on fait avancer un chien de 0^0 en 1^1; si le loup vient en 4^2, on avance 4^0 en 5^1; les autres chiens se déplacent sur leur droite, et reforment en cinq coups leur front de bataille.

Lorsque le loup est embusqué sur une autre case d'exposant égal à 3 ou plus grand que 3, les chiens se défendent de la même façon.



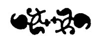
DEUXIÈME EMBÛCHE.

Le loup est sur une case d'exposant 2, mais à droite de l'axe vertical du damier, c'est-à-dire en 6^2 ou en 8^2. Supposons-le d'abord en 6^2; on fait avancer un chien vers la droite de 4^0 en 5^1. Si le loup recule en 5^3 ou en 7^3, on se retrouve dans le cas du premier assaut; si le loup vient en 7^1, on fait avancer 2^0 en 3^1, et le loup vient en 6^2 ou en 8^2; alors on avance 6^0 en 7^1, en reprenant la même tactique, et la ligne des chiens se trouve reformée après cinq coups, à moins que le loup ne se laisse acculer sur la case 9^1. Si, au début, le loup est en 8^2, on avance 6^0 en 7^1, et l'on termine comme précédemment.

TROISIÈME EMBÛCHE.

Le loup est sur une case d'exposant 1, à droite de l'axe vertical du damier, en 5^1, en 7^1 ou en 9^1. Supposons-le d'abord embusqué en 5^1. On fait avancer 2^0 en 3^1; si le loup recule en 4^2, il est évident que les chiens reforment leur ligne de défense en cinq coups; si le loup recule en 6^2, on fait avancer 4^0 en 5^1; si le loup recule en 5^3, les chiens se reforment en ligne; mais, si le loup vient en 7^1, on fait avancer 0^0 en 1^1; le loup se trouve obligé de reculer; alors on avance 6^0 en 7^1, puis 8^0 en 9^1, à moins que le loup n'y soit placé, auquel cas on l'enfermerait en avançant 7^1 en 8^2.

Si, au début, le loup se trouvait en 7^1, on reproduirait la tactique précédente, en la reportant de deux cases vers la droite. Enfin, si le loup se trouvait en 9^1, on ferait avancer 6^0 en 7^1, et l'on reformerait encore la ligne des chiens après cinq coups.



QUATRIÈME EMBÛCHE.

Si le loup est en 0^2, on avance 0^0 en 1^1 et la ligne de défense est reformée après cinq coups.

Si le loup est en 2^2, on avance 6^0 en 5^1; et le loup peut occuper quatre positions qui donnent lieu à quatre parties que nous considérerons successivement.

I. — Si le loup vient en 1^1, on avance 4^0 en 3^1, puis 0^0 en 1^1; le loup a reculé de deux rangs; s'il se trouve en 1^3, on avance 3^1 en 2^2; s'il se retrouve en 3^3, on avance 3^1 en 4^2, puis 2^0 en 3^1 et

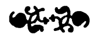
5^1 en 6^2; les chiens reforment facilement leur ligne en dix coups.

II. — Si le loup vient en 3^1, on avance 5^1 en 4^2, puis 0^0 en 1^1, 8^0 en 7^1, 2^0 en 3^1, et l'on reforme la ligne en dix coups.

III. — Si le loup vient en 1^3, on avance 0^0 en 1^1, 2^0 en 3^1, 5^1 en 4^2, et l'on reforme la ligne de défense en dix coups.

IV. — Si le loup vient en 3^3, on avance 5^1 en 4^2; puis 0^0 en 1^1, si le loup s'est retiré en 2^2 ou en 2^4, et enfin 2^0 en 3^1, car le loup ne peut s'y placer sans courir le risque d'être enfermé par les chiens. Mais, si le loup s'est retiré en 4^2, on fait avancer 4^0 en 5^1; et, dans les deux cas, on reforme la ligne de défense en dix coups.

Enfin, *si le loup est en* 4^2, il suffit de reporter la tactique des chiens que nous venons de développer de deux rangs vers la droite.



CINQUIÈME EMBÛCHE.

Si le loup est en 1^1, on avance 4^0 en 3^1, puis 0^0 en 1^1; après ces deux coups, le loup est en 1^3 ou en 3^3. S'il vient en 1^3, on avance 3^1 en 2^2, et l'on reforme la ligne en dix coups; s'il vient en 3^3, on fait avancer 3^1 en 4^2, puis 2^0 en 3^1, si le loup s'est embusqué en 2^2 ou 2^4, et 6^0 en 5^1, s'il est venu en 4^4. On reforme encore la ligne de défense en dix coups.

Si le loup est en 3^1, on avance 6^0 en 5^1, et l'on doit considérer deux cas, suivant que le loup est venu en 4^2 ou en 2^2.

I. — Si le loup est en 4^2, on avance 2^0 en 3^1, puis 5^1 en 4^2 si le loup s'est retiré en 3^3, et 5^1 en 6^2, 4^3 en 5^1, si le loup s'est embusqué en 5^3.

II. — Si le loup est en 2^2, on pousse 0^0 en 1^1, puis 2^0 en 3^1,

5^1 en 4^2, si le loup est venu en 1^3; mais on pousse 0^0 en 1^1, 5^1 en 4^2, si le loup est venu en 3^1 ou 3^3. Alors, si le loup est en 2^2 ou 2^4, on avance 2^0 en 3^1; s'il se trouve en 4^4, on avance 4^0 en 5^1, puis 5^1 en 6^2 si le loup est en 5^3, et 2^0 en 3^1, s'il se trouve en 3^3, 3^5 ou 5^5; il est ensuite facile de reformer la ligne en dix coups.

Remarque I. — Nous avons supposé, dans la théorie des cinq embûches qui précèdent, que les chiens sont placés (*p.* 94), sur la ligne d'exposant zéro. On opère exactement de la même manière, lorsque les chiens sont placés sur une ligne d'exposant pair, 2, 4, 6,...; il suffit, dans les tactiques que nous venons d'exposer, de diminuer tous les exposants de 2, 4, 6,... unités. Par suite, la théorie s'applique toujours à un échiquier de dix cases de largeur, et d'une hauteur aussi grande que l'on veut. Lorsque les chiens sont placés sur une ligne d'exposant impair, on diminue tous les exposants, dans les diverses tactiques, de cet exposant initial, mais en ayant le soin de numéroter toutes les cases, à partir du premier front de bataille, de droite à gauche, au lieu de les numéroter comme dans le cas des lignes paires de gauche à droite.

Remarque II. — Les mêmes considérations s'appliquent aux échiquiers de $2n$ cases de côté, pour n plus grand que 5, dans le problème de $2n$ chiens contre un loup.



NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

Dans notre mission scientifique, pour la publication des œuvres de Fermat, nous avons rencontré à la bibliothèque de

l'École de Médecine de Montpellier, un manuscrit in-8 sur vélin qui a pour titre :

LIVRE DU JEU *d'Eschets*, *Tables et des Mérelles*, *et s'appelle le dict livre* BACOT, *inventé par Nembrot*, *qui fonda la tour de Babylone.*

Ce manuscrit du XIIIe siècle, très bien conservé, débute ainsi : « Chi commenche li livre de partures des esches et de tables et de mérelles, et se claime cis livres Bakot, et le trouva Nebrot le ioiant, qui fist premiers en Babylone la tour qu'on claime Babel, où li langage furent mus par la volente nostre Seigneur, qui vit lor outrecuidanche; et de là fût Bakot aportés à Troie la grande; et de Troie en Gresse, après la destruction de Troie, et de Gresse vint en Franche, et encore y est. »

Cet ouvrage curieux renferme, à chaque page, des problèmes avec figures sur le jeu d'Échecs et sur le jeu de Trictrac. Les vingt-huit dernières pages contiennent autant de problèmes et de figures sur un jeu de marelle qui ne diffère pas, quant à la forme du tableau, du *Jeu national* que nous avons décrit à la page 83 du présent volume.



QUATRIÈME RÉCRÉATION.

—

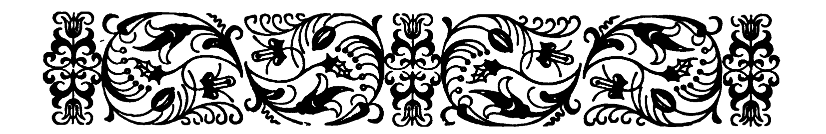
LE JEU DE PARQUET.

A Monsieur Henri Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique, sous-intendant militaire de Ire classe.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

(Descartes. — *Discours de la Methode.*)

7*



QUATRIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DE PARQUET.

HISTORIQUE.

Les anciens, qui possédaient à un degré supérieur le sens pratique de la vie, ne négligeaient rien de ce qui pouvait faire de leurs enfants des hommes sagaces et ingénieux. Dans les *Lois* de Platon, on peut lire un passage remarquable, relatif à la gymnastique intellectuelle à laquelle il faut soumettre l'intelligence des enfants. Il y est dit qu'il faut les exercer à une foule de petits calculs à leur portée, comme, par exemple, de partager, en un nombre plus ou moins grand de leurs camarades, un certain nombre de pommes ou de couronnes, en sorte qu'ils soient forcés, tout en s'amusant, de recourir à la science des nombres. Il est évident, en effet, que les enfants dans leurs jeux développent la faculté de compter, de comparer, d'ajouter, de diviser, et que, ainsi, ils arrivent à se familiariser avec les nombres (1).

(1) Ce paragraphe est emprunté à l'ouvrage déjà cité : *Les Jeux des anciens*, par M. Becq de Fouquières.



Parmi ces amusements mêlés de combinaisons, il faut ranger assurément la construction des mosaïques, qui demande une grande habileté, de l'expérience et une certaine connaissance des nombres. Les anciens aimaient beaucoup la variété, et, si dans leurs maisons ils n'avaient pas tous des mosaïques composées et finies comme de véritables peintures, ils voulaient au moins que le mosaïste fût assez habile pour varier à l'infini les dessins du parquet. Ceux-ci étaient d'une diversité dont on peut à peine se faire une idée et ne demandaient pourtant que l'emploi d'un nombre relativement petit de carreaux mi-partie de noir et de blanc. Chaque carreau divisé par une diagonale en deux parties, l'une blanche, l'autre noire, pouvait se placer dans quatre positions différentes. On prenait, par exemple, 196 de ces carreaux, et alors le nombre de combinaisons que pouvait offrir chaque manière de les placer et de les grouper devenait presque infini. Parmi les mosaïques qui nous ont été conservées, beaucoup sont composées d'après ce système. Nul doute que les enfants ne s'amusassent et ne s'exerçassent à ces mille combinaisons, au moyen de jetons semblables à ces carreaux.



LE JEU DE PARQUET.

Les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris* pour l'année 1704 contiennent un *Mémoire sur les combinaisons* par le R. P. Sébastien Truchet; il commence ainsi : « Dans le dernier voyage que j'ai fait au canal d'Orléans, par ordre de Son Altesse Royale, je trouvai dans un château nommé *la Motte*

Saint-Lyé, à quatre lieues en deçà d'Orléans, plusieurs carreaux de fayence carrés et mi-partie de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étaient destinés à carreler une chapelle et plusieurs autres appartements. Pour pouvoir former des dessins et des figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manières deux de ces carreaux peuvent se joindre ensemble, en les disposant toujours en échiquier. »

Et plus loin : « Nous avons consulté les livres de l'architecture civile, et ceux qui traitent des combinaisons, pour nous assurer si quelqu'un avait déjà fait les mêmes remarques que nous ; mais nous n'y avons rien trouvé qui en approchât. »

Nous devons faire observer que l'on a retrouvé, dans les fouilles d'Herculanum et de Pompeï, un grand nombre de mosaïques composées de la même manière ; nous en indiquerons quelques-unes dans la suite, au moyen d'une notation très simple. De plus, nous avons rencontré, en visitant le *Baptistère* de Florence et quelques autres monuments de l'Italie, des carrelages du même genre.

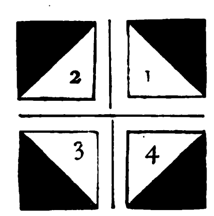
DÉNOMBREMENT DES MOSAÏQUES.

Si l'on divise un carré par une diagonale en deux parties, l'une blanche et l'autre noire, le carré obtenu peut prendre *quatre* positions qui ne diffèrent que par l'orientation, et qui sont représentées dans la *fig.* 27 ; elles sont numérotées comme les quadrants, suivant l'ordre ordinaire.

Ces quatre carrés, pris deux à deux et juxtaposés sur une même ligne, peuvent prendre *seize* dispositions différentes, qui

représentent les arrangements complets de quatre objets pris deux

Fig. 27.



à deux; ces dispositions sont notées numériquement dans le tableau suivant :

11, 12, 13, 14,
21, 22, 23, 24,
31, 32, 33, 34,
41, 42, 43, 44.

Mais si l'on ne considère pas comme distinctes deux dispositions qui ne diffèrent que par l'ordre des deux carrés, et, par exemple, les dispositions 23 et 32, on n'obtient que *dix* figures; c'est le nombre des dés du domino, depuis le double-as jusqu'au double-quatre; en d'autres termes, c'est le nombre des combinaisons complètes de quatre objets pris deux à deux.

On peut se proposer de déterminer le nombre des dispositions que l'on peut former avec un carré fait de quatre carreaux juxtaposés. Pour les obtenir, il suffit d'écrire, au-dessous d'une disposition quelconque de deux carreaux, l'une quelconque des seize dispositions; ainsi, par exemple (*fig.* 28).

Par suite, le nombre des carrés différents formés par quatre carreaux est égal à seize fois seize ou *deux cent cinquante-six*.

C'est précisément le nombre des arrangements complets de quatre

Fig. 28.

1 1 1 1	1 1 3 3	1 3 3 1	1 4 2 3	2 1 3 4
1 2 4 3	1 4 3 2	1 3 4 2	4 3 1 4	2 1 1 2

objets pris quatre à quatre ou 4^4. Ce résultat a été indiqué dans le mémoire du P. Douat (1).

Ces nouveaux carrés pris deux à deux et juxtaposés sur une même ligne peuvent prendre 256 × 256, c'est-à-dire 65 536 dispositions différentes; puis, si l'on place au-dessous de l'une quelconque des dispositions obtenues l'une quelconque de ces dispositions, on forme un carré de seize carreaux; le nombre de ces carrés est égal à 65 536 × 65 536, c'est-à-dire à

4 294 967 296.

De même le nombre des dispositions distinctes renfermées dans un carré formé par soixante-quatre carreaux est égal à 2^{128} ou le carré de

18 446 744 073 709 551 616 (2).

(1) Observations du P. D. Douat, religieux carme de la province de Toulouse, sur un mémoire inséré dans l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences de Paris*, année 1704, par le P. S. Truchet, religieux du même ordre. Paris, 1722, in-4°.

(2) Voir la Note II à la fin du volume.

DES DISPOSITIONS OPPOSÉES.

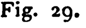
Mais, parmi toutes ces dispositions, on doit laisser de côté toutes celles qui ne donnent pas de dessins d'apparence régulière. Pour obtenir des dessins que l'on peut reproduire dans la parqueterie, on peut procéder d'abord par *juxtaposition*. Pour cela, on commence par remplir complètement de carreaux la superficie d'un rectangle ou d'un carré; puis on exécute le carrelage en reproduisant, les uns à côté des autres, des rectangles égaux au premier, et contenant les carreaux dans le même ordre. Pour désigner ce carrelage, il suffira de connaître la notation numérique du rectangle élémentaire.

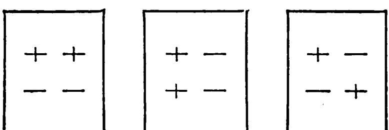
On appelle *dispositions opposées* ou *complémentaires* deux dispositions qui se transforment l'une dans l'autre en remplaçant le blanc par le noir, et le noir par le blanc; ainsi 1 et 3 sont des dispositions complémentaires; il en est de même de 2 et 4; par suite, deux dispositions sont complémentaires lorsque leurs notations ne diffèrent que par l'échange des chiffres 1 avec 3, 2 avec 4. En désignant l'ensemble de la notation de l'une d'elles par le signe +, l'autre sera désigné par le signe —.

Cela posé, au lieu d'assembler des carrés ou des rectangles élémentaires par simple juxtaposition, on peut les assembler par *opposition* des lignes ou des colonnes. En prenant un dessin quelconque +, on peut en doubler les dimensions, d'après les trois modes principaux (*fig.* 29).

Les deux premiers conduisent à des effets d'opposition par *lignes* ou par *colonnes;* le troisième est une opposition en échiquier.

Si l'on applique les divers procédés de juxtaposition dont nous


Fig. 29.



venons de parler aux carrés élémentaires de la *fig.* 28, on reproduit ainsi tous les dessins contenus dans le mémoire de Truchet, à l'exception de quelques-uns que l'on trouvera dans les deux paragraphes suivants.



DES EFFETS DE DIAGONALE ET DE SYMÉTRIE.

Pour obtenir des dessins présentant des lignes diagonales, on peut opérer comme il suit : On écrit sur une première ligne, dans un ordre quelconque, les chiffres 1, 2, 3, 4; puis on fait une permutation circulaire, de telle sorte que ces chiffres se trouvent alignés en diagonale; nous en donnons un exemple, emprunté au mémoire de Truchet :

Fig. 30.

1	3	4	3	1	3	2	3
3	4	3	1	3	2	3	1
4	3	1	3	2	3	1	3
3	1	3	2	3	1	3	4
1	3	2	3	1	3	4	3
3	2	3	1	3	4	3	1
2	3	1	3	4	3	1	3
3	1	3	4	3	1	3	2

Parquet en diagonale.



Lorsque l'on voudra construire un album de parquetage, il suffira de conserver la notation de la disposition qui produit un bel effet ; dans la collection des *diagonales*, on n'aura qu'à inscrire évidemment la première ligne de la notation.

On sait que deux figures planes sont dites *symétriques* par rapport à une ligne droite, lorsqu'en repliant le plan qui les contient le long de cette droite, les deux figures viennent coïncider exactement. Nous considérerons plus particulièrement la symétrie par lignes ou par colonnes. Pour obtenir la disposition symétrique par lignes, d'une ou plusieurs lignes de carreaux, on écrit d'abord au crayon la suite des numéros des carreaux dans l'ordre inverse, puis on échange entre eux les numéros 1 et 2, et les numéros 3 et 4. Ainsi, par exemple, pour obtenir la symétrie par lignes de la figure

2	4	3	1		1	3	4	2
4	3	1	2	on écrira d'abord	2	1	3	4
3	1	2	4		4	2	1	3
1	2	3	4		4	3	2	1

puis, après avoir échangé, dans ce dernier tableau, 1 avec 2, et 3 avec 4, on aura la disposition symétrique par lignes

2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	1	2	4	3
3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	3	4	3	4	1	2

Pour obtenir la disposition symétrique par colonnes, d'une ou de plusieurs colonnes de carreaux, on opère dans le sens des



colonnes, comme nous venons de le faire dans le sens des lignes, puis on échange les numéros 1 avec 4 et 2 avec 3.



DISPOSITIONS RÉGULIÈRES.

Si l'on applique ce procédé à la disposition précédente, on obtient un dessin qui possède deux axes et un centre de symétrie; c'est ce que nous appellerons une ***disposition régulière.*** On a, par exemple, la disposition régulière (*fig.* 31).

Fig. 31.

2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	1	2	4	3
3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	3	4	3	4	1	2
4	3	2	1	2	1	4	3
2	4	3	1	2	4	3	1
1	2	4	3	4	3	1	2
3	1	2	4	3	1	2	4

Lorsque l'on voudra construire un album de dispositions régulières, il suffira de conserver les parquets qui présentent les meilleures combinaisons, en n'écrivant que le premier quart de la disposition.

Au moyen de cette notation, les planches du mémoire de Truchet se résument dans les dispositions régulières suivantes :

Fig. 32.

2 4 3	4 2 1	4 3 4
4 2 4	2 4 3	1 2 2
1 4 2	3 1 4	4 2 4

Parquets symétriques de 36 cases.

Fig. 33.

2 4 3 1	2 4 2 4	2 1 3 4	2 4 1 3
4 3 1 2	4 2 4 2	4 2 1 3	4 2 3 1
3 1 2 4	2 4 2 4	2 1 3 4	3 1 4 2
1 2 3 4	4 2 4 2	4 2 1 3	1 3 2 4

Parquets symétriques de 64 cases.

Fig. 34.

4 2 2 4 2	4 1 3 1 3
2 2 4 2 4	3 4 2 4 2
2 4 2 4 2	1 2 4 2 4
4 2 4 2 2	3 4 2 4 1
2 4 2 2 4	1 2 4 3 4

Parquets symétriques de 100 cases.

On assemble ensuite les dessins soit par simple juxtaposition, soit par opposition, soit en échiquier. Le lecteur qui s'exercera dans l'assemblage de ces carreaux, en bois ou en carton découpé,

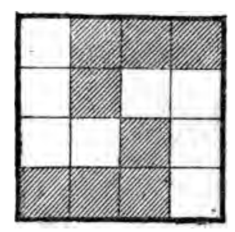
sera frappé de la variété indéfinie et de la symétrie des dessins que l'on peut obtenir pour la construction des mosaïques.



PARQUETS ANALLAGMATIQUES.

Au lieu d'assembler des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale, on peut aussi assembler des carreaux de deux ou de plusieurs couleurs ; on obtient ainsi des résultats bien différents de ceux que nous venons de trouver. Mais nous rattacherons la théorie générale des dessins réguliers que l'on peut obtenir par ces assemblages à la géométrie du tissage ; nous ne nous occuperons ici que d'un genre très curieux de parquetage auquel M. Sylvester a donné le nom de *carrés anallagmatiques*.

Fig. 35.



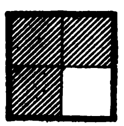
Parquet anallagmatique de 16 cases.

L'échiquier anallagmatique est un carré formé de cases noires et blanches, en nombre égal ou inégal, de telle sorte que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre des variations de couleurs soit toujours égal au nombre des permanences. La *fig.* 35 est un échiquier anallagmatique de seize cases.

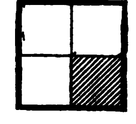
Il existe un pavage anallagmatique de ce genre, en marbre blanc et rose, dans l'une des cours d'un établissement public de Londres.

Si l'on remplace les cases noires par les cases blanches, et inversement, on obtient l'échiquier anallagmatique *opposé* ou *complémentaire*.

Fig. 36.



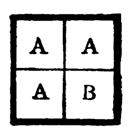
Carré A.



Carré B.

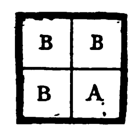
Voici un procédé pour construire les carrés anallagmatiques de 2^n cases de côté [1]. On a les deux échiquiers complémentaires de deux cases de côté (*fig.* 36) :

Fig. 37.





Carré A'.



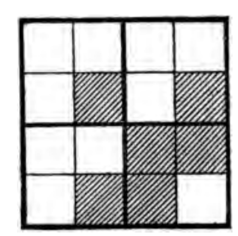
Carré B'.

Avec ces deux échiquiers A et B, on formera de même les échiquiers suivants, *complémentaires*, de quatre cases de côté (*fig.* 37),

[1] LAISANT. — *Notice historique sur les travaux des sections de Mathématiques.* (Association française pour l'avancement des Sciences. Compte rendu de la 8e session. Montpellier, 1879.)

c'est-à-dire (*fig.* 38) :

Fig. 38.



Puis si, dans la *fig.* 37, on remplace A et B par A′ et B′, on obtient des carrés anallagmatiques complémentaires de huit cases de côté ; et ainsi de suite. Il en sera toujours ainsi, lorsque l'on remplacera dans cette figure les carrés A et B par deux carrés anallagmatiques complémentaires quelconques. D'ailleurs, il est évident que d'un échiquier on peut en déduire un grand nombre d'autres : 1° par une permutation quelconque des lignes ou des colonnes ; 2° par le changement de la couleur de toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne quelconque.



FORMULES D'ARITHMÉTIQUE.

Nous avons montré, au Congrès du Havre, l'analogie qui existe entre l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester et les formules qui donnent la décomposition du produit de sommes de deux, quatre, huit carrés en une somme de deux, quatre, huit carrés. On sait que cette formule a été donnée par Léonard de Pise pour

deux carrés, par Euler pour quatre carrés, par Prouhet et M. Cayley pour huit carrés.

Par exemple, en remplaçant les cases blanches de la *fig.* 35 par le signe + et les cases noires par le signe —, on forme le tableau

$$\begin{array}{cccc} + & - & - & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ - & - & - & + \end{array}$$

que l'on retrouve dans le produit de

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{par} \quad p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

mis sous la forme suivante, d'une somme de quatre carrés :

$$\begin{array}{l} [+ap - bq - cr - ds]^2, \\ [+as - br + cq + dp]^2, \\ [+aq + bp - cs + dr]^2, \\ [-ar - bs - cp + dq]^2. \end{array}$$



MOSAÏQUES DE M. LAISANT.

On peut obtenir d'autres parquets réguliers composés de carrés blancs et noirs, et plus généralement de carrés de plusieurs couleurs, par divers autres procédés. Nous indiquerons, en particulier, des dessins obtenus par M. Laisant, et qu'il a déduits de considérations sur l'Algèbre et sur la théorie des Quaternions [1]. Désignons par A un échiquier quelconque formé de

[1] LAISANT. — *Sur les développements de certains produits algébriques.* (Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès d'Alger; 1881). L'idée de cette étude tire son origine du problème suivant, proposé par

cases noires et blanches, par B l'échiquier complémentaire obtenu en échangeant les couleurs des cases. Avec ces deux échiquiers A et B, on formera deux échiquiers complémentaires quatre fois plus grands (*fig.* 39).

Puis, si l'on remplace A et B par A′ et B′ dans la *fig.* 39, on

Fig. 39.

A	B
B	A

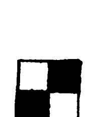
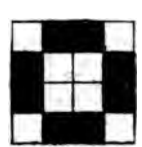
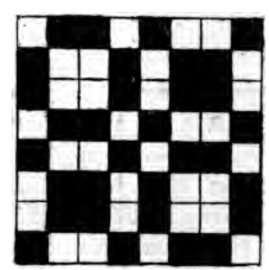
Carré A′.

B	A
A	B

Carré B′.

obtient des mosaïques complémentaires quatre fois plus grandes, et ainsi de suite. Si l'on suppose d'abord que A et B représentent respectivement un seul carré blanc et un seul carré noir, on for-

Fig. 40.

M. Catalan aux lecteurs de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (T. VI, p. 141) : « Dans le développement du produit

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots$$

effectué dans l'ordre ordinaire, savoir :

$$1-a-b+ab-c+ac+bc-abc-d+\ldots,$$

quel est le signe d'un terme de rang donné? »

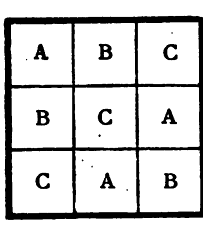


mera ainsi les mosaïques de 4, 16, 64 cases (*fig.* 40), ainsi que leurs complémentaires.

On observe que chacun des échiquiers de la *fig.* 40 possède la propriété d'une table de Pythagore, c'est-à-dire que, pour avoir la couleur d'une case quelconque, il suffira de regarder la première case de sa colonne, et la première case de sa ligne. Si elles sont de même couleur, la case considérée sera blanche; si elles sont de couleurs contraires, elle sera noire. Ce serait l'inverse pour les échiquiers complémentaires. De plus, entre deux colonnes ou deux lignes quelconques de l'échiquier, les cases correspondantes sont toutes de même couleur, ou toutes de couleurs contraires.

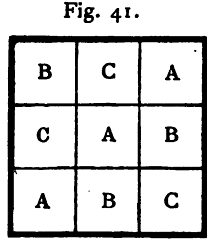
Pour former des dessins réguliers de mosaïques à trois couleurs, désignons par A un échiquier quelconque tricolore, par B l'échiquier obtenu en remplaçant dans A la première couleur par la seconde, la seconde par la troisième, et la troisième par la première; par C l'échiquier déduit de B, comme B a été déduit de A. Nous dirons que les trois échiquiers sont associés; avec ces trois échiquiers A, B et C, nous formerons trois échiquiers associés neuf fois plus grands (*fig.* 41).

Fig. 41.

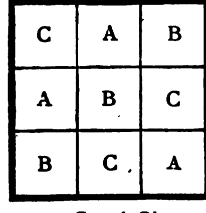




Carré A'.



Carré B'.



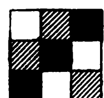
Carré C'.

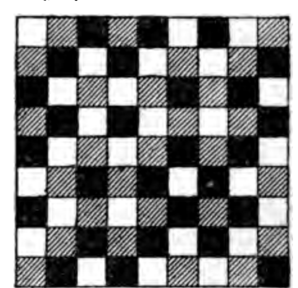




Puis si, dans la *fig.* 41, on remplace A, B et C par les échiquiers associés A′, B′ et C′, on obtient des mosaïques tricolores neuf fois plus grandes, et ainsi de suite. Si l'on suppose d'abord que A, B et C représentent respectivement un seul carré blanc, gris ou noir, on formera ainsi les mosaïques de 9, 81,... cases (*fig.* 42), ainsi que les mosaïques associées qui se déduisent de

Fig. 42.





l'une d'elles par permutation circulaire des lignes, des colonnes ou des couleurs.

Les deux figures coloriées de la planche ci-contre sont obtenues par des procédés analogues.





CINQUIÈME RÉCRÉATION.

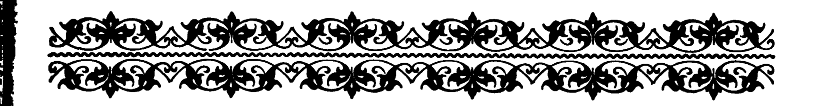
—

LES JEUX DE CASSE-TÊTE.

A Monsieur Luigi Cremona, sénateur d'Italie, directeur du Collège royal des Ingénieurs, à San Pietro-in-Vincoli.

Qual è il geometra, che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritruova,
Pensando, quel principio ond'egli indige;
Tale era io a quella vista nuova,
Veder voleva come si convenne
L'imago al cerchio, e come vi s'indova.

(DANTE. — *Paradiso*, XXXIII.)



CINQUIÈME RÉCRÉATION.

—

LES JEUX DE CASSE-TÊTE.

HISTORIQUE.

Le jeu des figures d'ivoire, basé sur un principe analogue à celui du jeu de parquet, et que les enfants connaissent sous le nom de *casse-tête chinois*, nous a été décrit par Ausone, dans une lettre qu'il adresse à Paulus. C'est en voulant lui donner une explication du centon, qu'il entre dans quelques détails sur ce jeu. « Le centon, dit-il, ressemble à ce que les Grecs appellent ὀστομαχία ou le jeu des figures d'ivoire. Ce sont quatorze petits morceaux d'ivoire affectant diverses formes géométriques. Les uns sont des triangles isoscèles, les autres sont des triangles équilatéraux; d'autres présentent la forme de triangles scalènes ou bien rectangles. Or, de l'assemblage de ces figures résultent mille formes diverses. Tantôt c'est un éléphant, tantôt un sanglier, une oie qui vole, un mirmillon armé, un chasseur à l'affût, un chien qui aboie. C'est encore une tourterelle, un canthare, et un nombre infini d'autres choses, selon la science plus ou moins

grande du joueur. » La meilleure explication que nous pourrions donner ne vaudrait pas celle que l'on peut se donner soi-même en s'arrêtant quelques instants devant la vitrine d'un marchand de jouets.

C'est au moyen d'un jeu à peu près semblable que les anciens apprenaient à lire à leurs enfants. On leur enseignait l'alphabet, comme le dit Quintilien, au moyen de lettres figurées en ivoire; et il n'est pas sans intérêt de rappeler que c'est avec des lettres d'ivoire que saint Jérôme apprenait à lire à sa fille; c'était, comme il le dit, un jeu et en même temps une étude. Tantôt il plaçait les lettres dans leur ordre, tantôt il renversait ou bouleversait cet ordre. On use encore aujourd'hui du procédé de saint Jérôme dont les Grecs se servaient bien des siècles avant lui. (*Les Jeux des Anciens*, p. 72).

Nous réunissons, dans cette récréation, quelques problèmes dont le principe repose sur la transformation des figures géométriques par le déplacement de leurs diverses parties; on sait que c'est par ce principe que l'on démontre les premiers éléments de Géométrie concernant l'égalité ou l'équivalence, et aussi, en particulier, la théorie de l'égalité des triangles, les théorèmes sur les perpendiculaires et sur les parallèles. Nous y avons ajouté quelques divertissements géométriques ou numériques dont la solution exige un petit effort d'esprit, mais dont les démonstrations ne présentent aucune difficulté.





LES TROIS CARRÉS.

Découper la figure formée par trois carrés égaux et juxtaposés en quatre parties superposables.

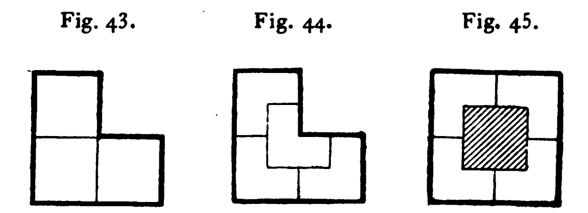
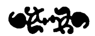


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

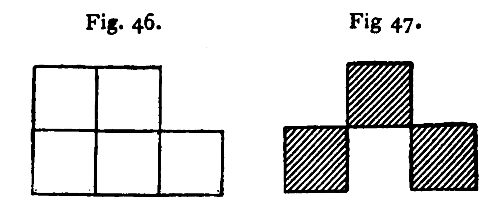
La feuille de papier ou de carton que l'on doit découper est représentée dans la *fig.* 43 ; la manière de faire ce découpage est indiquée dans la *fig.* 44 ; enfin la *fig.* 45 montre que l'on peut former avec les quatre morceaux un carré, avec un plus petit carré vide à l'intérieur ; ce qui fait une autre devinette. On peut aussi former un rectangle.



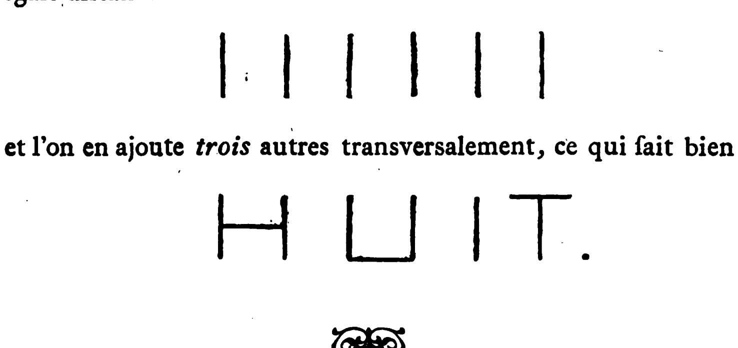
LES CINQ CARRÉS.

Avec quinze petites baguettes égales, des allumettes, par exemple, 1° former la figure de cinq carrés égaux et juxtaposés ; 2° enlever trois baguettes de telle sorte qu'il ne reste plus que trois carrés.

La solution des deux problèmes se trouve suffisamment expliquée dans les *fig.* 46 et 47.


Fig. 46. Fig 47.

Ne rangeons pas nos petites bûchettes sans donner une plaisante leçon de calcul et de lecture aux petits enfants; nous leur ferons voir que *six et trois font* HUIT. On dispose *six* baguettes à égale distance



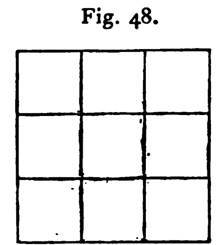
et l'on en ajoute *trois* autres transversalement, ce qui fait bien

LES NEUF CARRÉS.

Avec vingt-quatre petites baguettes égales, 1° former la figure de neuf carrés égaux et juxtaposés; 2° enlever huit baguettes de telle sorte qu'il ne reste plus que deux carrés.

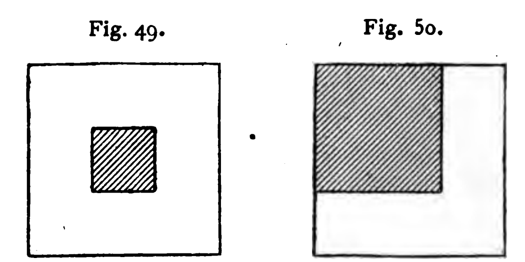
Avec les vingt-quatre bûchettes on forme d'abord la *fig*. 48 ;

Fig. 48.

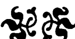


cela fait, on peut enlever huit bûchettes de deux manières différentes (*fig*. 49 et 50), de telle sorte qu'il reste deux carrés.

Fig. 49. Fig. 50.



On peut encore se proposer d'enlever neuf bûchettes de la *fig*. 48, de manière à n'avoir plus que cinq carrés ; on retrouve alors la *fig*. 46.



LES TRENTE-SIX CARRÉS.

Une feuille de carton a la forme d'un rectangle dont les côtés ont quatre et neuf unités de longueur ; on demande de découper cette feuille en deux morceaux égaux pouvant être réunis de manière à former un carré.

La solution de ce problème est suffisamment expliquée par les *fig.* 51 et 52.

Fig. 51.

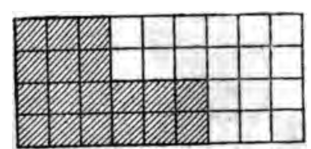
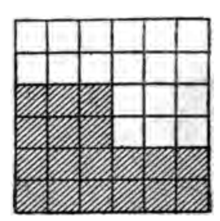


Fig. 52.



Ne rions pas trop de ce petit problème; il nous montre géométriquement que *quatre fois neuf font six fois six;* nous donnerons plus loin, dans le Paradoxe géométrique, la démonstration de *huit fois huit font cinq fois treize,* c'est-à-dire que soixante-quatre égale soixante-cinq.



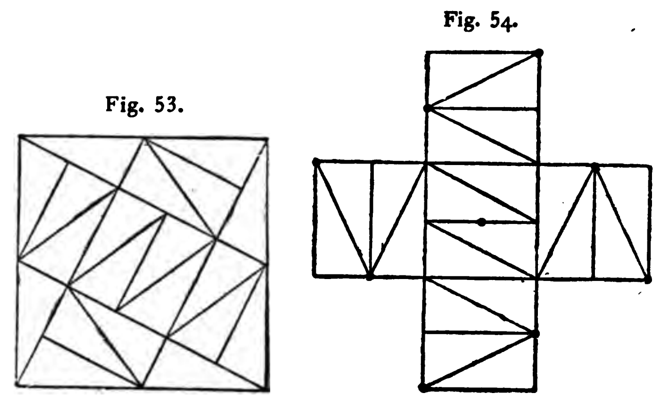
LES VINGT TRIANGLES.

Découper une feuille de carton ayant la forme d'un carré en vingt triangles égaux.

On joint les milieux des côtés du carré, à l'un des sommets opposés (*fig* 53); puis, l'on mène des parallèles aux lignes de jonction. On décompose ainsi le carré en vingt triangles rectangles égaux; l'un des côtés de l'angle droit est double de l'autre.

On peut se proposer le problème d'une autre manière, en disant : Avec vingt triangles rectangles égaux dans lesquels l'un

des côtés de l'angle droit est double de l'autre, former : 1° un carré ; 2° cinq carrés égaux. On peut réunir ces cinq carrés sous


Fig. 53. Fig. 54.

la forme d'une croix, ainsi que nous l'avons représenté dans la *fig.* 54.

Si les deux faces des vingt triangles sont recouvertes de couleurs, on peut obtenir en grand nombre des dessins variés.



LA CHAISE DE LA MARIÉE.

Parmi la multitude des démonstrations que l'on a données du carré de l'hypoténuse, nous croyons devoir reproduire la suivante qui appartient au genre casse-tête.

Nous construisons deux carrés égaux dont chacun des côtés est égal à la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque, et nous formons les *fig.* 55 et 56. Si de cha-

cun de ces carrés égaux, on retranche quatre triangles égaux au triangle rectangle donné, il reste, d'une part (*fig.* 56), le carré

Fig. 55.

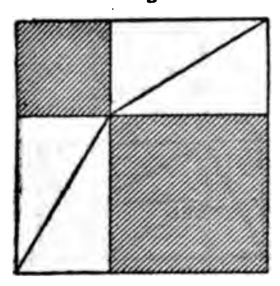
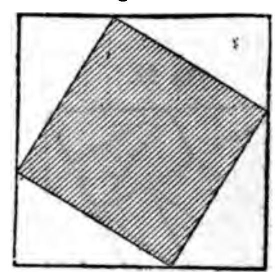


Fig. 56.



construit sur l'hypoténuse, et d'autre part (*fig.* 55), les deux carrés construits sur les autres côtés.

La démonstration que nous venons de donner du théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse ne diffère pas essentiellement de la démonstration hindoue, connue sous le nom de la *Chaise de la petite mariée*, que l'on rencontre dans l'ouvrage de Bhascara (*Bija-Ganita*, § 146). Après avoir tracé la figure qui n'est qu'une combinaison des deux précédentes, l'auteur hindou se contente de dire : *Voyez*. Le Numéro de janvier 1882 de *The mathematical Magazine* contient une variante de cette démonstration, attribuée à Garfield, l'infortuné président des États-Unis, assassiné l'année précédente.

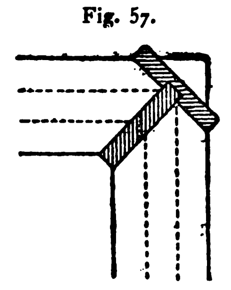


LE FOSSÉ DU CHAMP CARRÉ.

Un champ carré est entouré d'un fossé dont la largeur est partout la même; on demande d'établir un pont avec deux ma-

driers dont la longueur est précisément égale à la largeur du fossé.

Fig. 57.



La *fig.* 57 représente un coin du champ, avec la disposition des deux madriers. Quant à la démonstration mathématique, elle résulte de l'inégalité suivante, que le double de la diagonale d'un carré est plus petit que le triple du côté. Cette devinette peut trouver son utilité en temps de guerre; nous avons déjà donné un autre exemple, dans notre premier volume, pour la traversée d'un régiment; nous donnerons encore les deux exemples suivants qui nous ont été communiqués par M. A. Cuny, inspecteur principal de l'exploitation des chemins de fer de l'État, à Nantes.

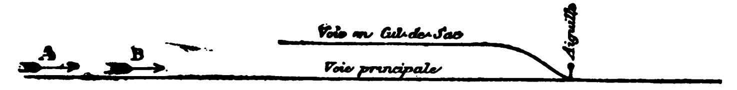


MANŒUVRES DE GARE.

Problème I. — *Garage d'un train* B *dans une station ne comportant, indépendamment de la voie principale, qu'une voie en*

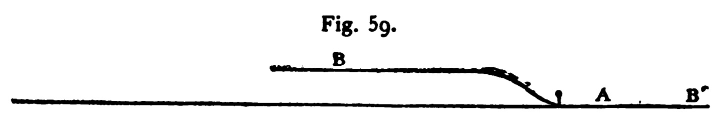
cul-de-sac insuffisante pour contenir entièrement le train B, *que doit cependant dépasser le train* A *marchant dans le même sens mais avec une vitesse plus grande que celle du train* B (*fig.* 58).

Fig. 58.



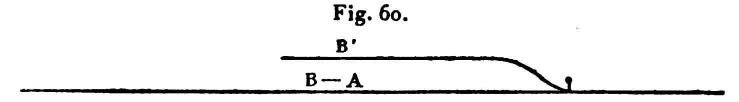
On exécute successivement les trois mouvements suivants :

Fig. 59.



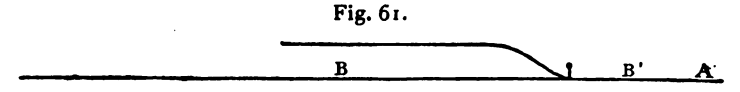
1° Garer sur le cul-de-sac une partie seulement du train B; l'autre partie restant en B', le train A pourra par suite se placer entre l'aiguille et la partie du train B' (*fig.* 59).

Fig. 60.



2° Le train A prend ensuite la partie du train B garée sur le cul-de-sac pour la placer sur la voie principale; la partie du train B' comprenant la machine pourra par suite prendre la place de B sur le cul-de-sac devenu libre (*fig.* 60).

Fig. 61.

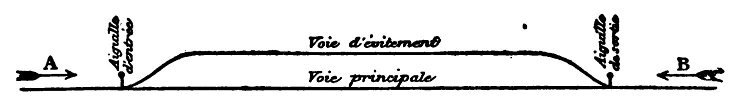


3° Le deuxième mouvement terminé, rien ne s'oppose plus à l'expédition du train A et à la formation du train B, en joignant B' à B (*fig.* 61).

Remarque. — Les divers mouvements indiqués ci-dessus exigeant une perte de temps relativement longue, il est plus pratique d'expédier le premier train B à la station voisine munie des voies nécessaires pour le garer entièrement, et de retenir le train A pendant quelques minutes afin de maintenir un intervalle suffisant pour éviter une collision; mais cette remarque ne s'applique pas au second problème.

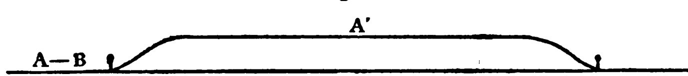
Problème II. — *Croisement de deux trains, marchant en sens contraires, dans une station ne comportant qu'une voie d'évitement trop courte pour contenir les trains considérés* (*fig.* 62).

Fig. 62.



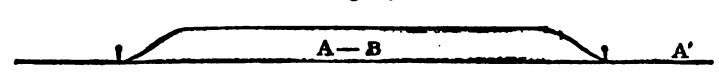
On résout ce problème par trois mouvements successifs :

Fig. 63.



1° Garer une première partie du train A remorquée par la machine sur la voie d'évitement, le train B pourra par suite franchir la station de façon à dégager l'aiguille de sortie, et permettre à la partie A' de dégager la voie d'évitement (*fig.* 63).

Fig. 64.



2° Ramener la partie A en refoulant B sur la voie principale, cette partie A sera abandonnée jusqu'à ce que le train B, continuant son mouvement de recul, puisse s'engager sur la voie

d'évitement par l'aiguille de sortie et que, reprenant sa marche en avant, il franchisse de nouveau la station en sortant par l'aiguille d'entrée (*fig.* 64).

Fig. 65.

B A A'

3° Dès le départ du train B, reformer le train A en joignant les deux parties A' et A (*fig.* 65).



LA CROIX DE PERLES.

Une vieille marquise donne une croix de perles à son joaillier pour la réparer; elle lui fait remarquer qu'elle connaît le

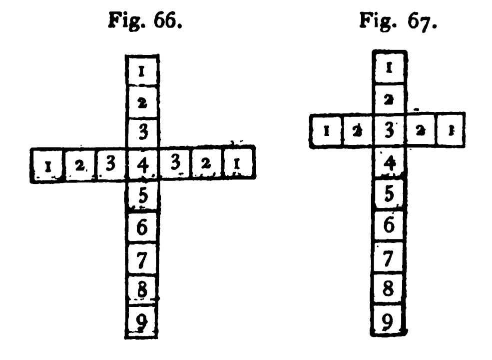


Fig. 66. Fig. 67.

nombre des perles, car, en les comptant à partir de l'une des trois extrémités supérieures jusqu'au bas de la croix, elle en trouve toujours neuf; le joaillier retire deux perles et rend la



croix à la marquise qui trouve son compte. On demande ce que fit le joaillier?

On voit facilement, par les *fig.* 66 et 67, que le joaillier a pris une perle à chacun des bras de la croix et a ensuite relevé ceux-ci d'un rang. Le joaillier aurait pu tout aussi bien baisser d'un rang les deux bras de la croix, en ajoutant une perle à chacun d'eux.

Il faut convenir que la vieille marquise était bien naïve, ainsi que l'abbesse du couvent dont il est parlé dans le problème suivant, du même genre. Aussi ne doit-on considérer ces énoncés que comme des exemples, les plus simples, de la résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers et positifs.



LES RELIGIEUSES.

Des religieuses sont retirées en huit cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en carré, et chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'abbesse, qu'on suppose aveugle, fait sa visite. Elle compte le nombre des religieuses qui sont dans les trois cellules d'un rang; elle trouve que le nombre des religieuses d'un rang est partout égal à neuf, en prenant pour un rang deux cellules des coins et celle du milieu. Cette abbesse fait une seconde visite, et compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la première visite, quoiqu'il y soit entré quatre nonnes. Enfin, dans la troisième visite, elle trouve encore neuf personnes

dans chaque rang, bien que les nonnes soient sorties avec quatre religieuses.

Supposons d'abord qu'il y ait trois religieuses dans chaque cellule (*fig.* 68); l'abbesse en compte neuf à chaque rangée,

Fig. 68.

3	3	3
3		3
3	3	3

Fig. 69.

2	5	2
5		5
2	5	2

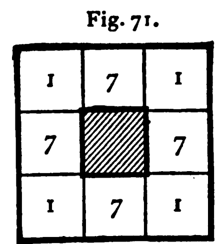
dans sa première visite, et le nombre des religieuses est vingt-quatre. Ensuite, si une religieuse sort de chaque cellule du coin pour entrer avec une nonne dans la cellule du milieu, en tournant dans le même sens (*fig.* 69), l'abbesse trouve encore neuf personnes dans chaque rangée à la deuxième visite, bien qu'il y ait maintenant vingt-huit personnes.

Enfin, si chacune des nonnes quitte le dortoir avec une reli-

Fig. 70.

4	1	4
1		1
4	1	4

Fig. 71.



gieuse et si les religieuses qui s'étaient déplacées retournent dans leur cellule avec une autre religieuse (*fig.* 70), l'abbesse comptera neuf personnes dans chaque rangée, bien qu'il ne reste plus au dortoir que vingt religieuses.

On peut exécuter aisément ce problème avec des jetons noirs pour les religieuses et blancs pour les nonnettes. On peut faire une nouvelle modification en supposant que chacune des religieuses qui est sortie avec une nonne en a ramené deux, le nombre des personnes devient trente-deux (*fig.* 71).

LE BON BOURGEOIS.

Nous donnerons encore l'énoncé suivant, que nous empruntons à la 4ᵉ édition des *Problèmes plaisants et délectables* (p. 189); ce problème ne diffère du précédent que par le nombre des jetons; mais les nonnettes sont remplacées par des bouteilles.

Un bon bourgeois fit faire dans sa cave un casier de neuf cases disposées en carré; la case du milieu était destinée à recevoir les bouteilles vides provenant de la consommation de soixante bouteilles pleines, qu'il disposa dans les huit autres cases en mettant six bouteilles dans chaque case des angles et neuf dans chacune des autres cases. Son domestique enleva d'abord quatre bouteilles qu'il vendit, et disposa les bouteilles restantes de manière qu'il y en eût toujours vingt et une sur chaque côté du carré. Le maître, trompé par cette disposition, pensa que son domestique n'avait fait qu'une transposition de bouteilles, et qu'il y en avait toujours le même nombre. Le domestique profita de la simplicité de son maître pour enlever de nouveau quatre bouteilles, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne fût plus possible d'en enlever quatre sans que le nombre vingt et un cessât de se trouver sur chaque côté



du carré. On demande comment il s'y prit à chaque fois et de combien de bouteilles il fit tort à son maître?

En désignant par x le nombre des bouteilles de chaque coin et par y le nombre des bouteilles de chaque milieu, on doit avoir

$$2x + y = 21,$$

et le nombre des bouteilles dans la cave est égal à $42 + 2y$.

En supposant successivement pour y, qui doit être impair et au plus égal à 21, les valeurs 1, 3, 5, 7, ..., on peut obtenir les dispositions suivantes :

Dispositions.	Nombre des bouteilles		
	dans un coin.	dans un milieu.	dans la cave.
1	0	21	84
2	1	19	80
3	2	17	76
4	3	15	72
5	4	13	68
6	5	11	64
7	6	9	60
8	7	7	56
9	8	5	52
10	9	3	48
11	10	1	44

En commençant à la septième disposition, le valet a fait tort à son maître de 16 bouteilles.

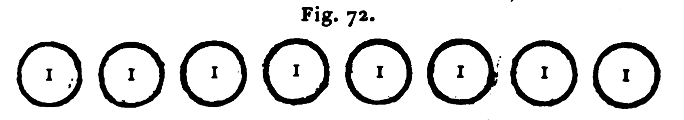


LES HUIT JETONS.

Huit jetons sont disposés en ligne droite à la suite les uns des autres; on demande comment il faut déplacer quatre de ces jetons en les faisant sauter par-dessus deux autres pour les poser sur un troisième, de telle sorte qu'il reste quatre piles de deux jetons.

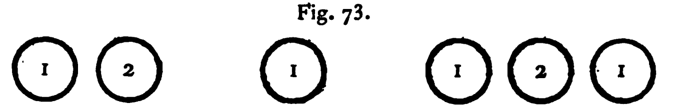
Supposons d'abord les pions dans la position de la *fig.* 72; on

Fig. 72.



place le cinquième pion, en comptant de gauche à droite, sur le second, puis le troisième sur le septième (*fig.* 73).

Fig. 73.



Il reste alors à poser les pions, qui se trouvaient d'abord le quatrième et le sixième, sur le premier et sur le dernier.

On peut varier ce problème en augmentant le nombre des jetons d'un nombre pair quelconque. En effet, si l'on pose d'abord le quatrième jeton de la série sur le premier, on peut supposer que l'on a diminué de deux unités le nombre des pions; on répétera la manœuvre jusqu'à ce que le nombre des pions se trouve abaissé à huit. Il faut avoir soin de ne pas continuer la même manœuvre pour huit pions, car on se trouverait amené à six jetons, et, dans ce cas, le problème est impossible.

Au lieu de sauter sur deux jetons, on peut sauter sur trois, en

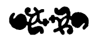
prenant d'abord une ligne de douze pions qu'il faut transformer en quatre piles contenant chacune trois pions. On commence d'abord par former deux piles sur le deuxième jeton à droite et sur le deuxième à gauche. Puis on forme les piles extrêmes en faisant passer successivement les autres pions par-dessus chacune des deux piles formées.

Voici les dispositions successives pour douze jetons; les chiffres 1, 2, 3, 0, indiquent le nombre des jetons sur chaque case :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	0	1	1	1	2	1
1	3	1	1	1	0	0	0	1	1	2	1
1	3	1	0	1	0	0	0	1	1	3	1
2	3	0	0	1	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3.

Si la ligne initiale contient 15, 18, 21,..... jetons, on commence par diminuer successivement de trois en formant une pile à l'une des extrémités, jusqu'à ce que la ligne ne renferme plus que douze jetons.

D'ailleurs cette méthode est générale, et permet de résoudre ce problème : *Étant donnés mp jetons en ligne droite, m n'étant pas plus petit que 4, former m piles de p jetons en passant par-dessus p jetons.* Cette généralisation a été indiquée par M. Delannoy.



LE JEU DES GRENOUILLES.

On place sur les cases d'une bande formée d'un nombre impair de carrés un nombre égal de pions blancs et noirs, séparés par une case vide; tous les pions blancs se trouvant à gauche, et les pions noirs à droite. Il s'agit de faire passer les pions blancs à la place des pions noirs, en profitant de la case vide.

On adopte les règles suivantes : Les pions peuvent avancer d'une case, en allant toujours de gauche à droite, pour les pions blancs; et en sens inverse, pour les pions noirs. Un pion peut franchir un pion d'une autre couleur, dans le sens de son mouvement exigé, pour venir se placer sur la case vide immédiatement voisine.

Si l'on suppose d'abord deux pions blancs ○, ○, et deux pions noirs ●, ●, séparés par une case vide que nous désignerons toujours par un point, on opérera d'après le tableau suivant; la

1	○	○	.	●	●	.
2	○	.	○	●	●	1
3	○	●	○	.	●	2
4	○	●	○	●	.	1
5	○	●	.	●	○	2
6	.	●	○	●	○	2
7	●	.	○	●	○	1
8	●	●	○	.	○	2
9	●	●	.	○	○	1

colonne numérique à gauche indique la suite des coups, la colonne numérique à droite distingue, par les chiffres 1 et 2, le

pas ou avance d'une seule case, du *saut* ou avance de deux cases.

Le problème se trouve ainsi résolu en 9 positions; et l'on observe que la colonne de droite est symétrique, c'est-à-dire qu'elle donne les mêmes chiffres en la lisant de bas en haut ou haut en bas; de plus, le rectangle qui indique les diverses positions est symétrique par rapport au centre.

Si l'on suppose trois pions blancs et trois pions noirs, on échange les deux systèmes, d'après les règles indiquées, conformément au tableau suivant sur lequel on peut encore faire les remarques qui précèdent.

1	○	○	○	.	●	●	●	.
2	○	○	.	○	●	●	●	1
3	○	○	●	○	.	●	●	2
4	○	○	●	○	●	.	●	1
5	○	○	●	.	●	○	●	2
6	○	.	●	○	●	○	●	2
7	.	○	●	○	●	○	●	1
8	●	○	.	○	●	○	●	2
9	●	○	●	○	.	○	●	2
10	●	○	●	○	●	○	.	2
11	●	○	●	○	●	.	○	1
12	●	○	●	.	●	○	○	2
13	●	.	●	○	●	○	○	2
14	●	●	.	○	●	○	○	1
15	●	●	●	○	.	○	○	2
16	●	●	●	.	○	○	○	1

Le nombre des positions est égal à 16, le nombre des pas à 6 et le nombre des sauts à 9. Pour le cas de quatre pions blancs et de

quatre pions noirs, nous donnerons seulement la moitié du tableau des positions, l'autre moitié s'en déduit par symétrie.

1	○	○	○	○	.	●	●	●	●	.
2	○	○	○	.	○	●	●	●	●	1
3	○	○	○	●	○	.	●	●	●	2
4	○	○	○	●	○	●	.	●	●	1
5	○	○	○	●	.	●	○	●	●	2
6	○	○	.	●	○	●	○	●	●	2
7	○	.	○	●	○	●	○	●	●	1
8	○	●	○	.	○	●	○	●	●	2
9	○	●	○	●	○	.	○	●	●	2
10	○	●	○	●	○	●	○	.	●	2
11	○	●	○	●	○	●	○	●	.	1
12	○	●	○	●	○	●	.	●	○	2
13	○	●	○	●	.	●	○	●	○	2

Le nombre des positions est 25; le nombre des pas est égal à 8 et le nombre des sauts à 16. En général, le problème est toujours possible, et si l'on suppose p pions blancs et p pions noirs,

le nombre total des positions est $(p+1)^2$;

le nombre des pas est $2p$;

le nombre des sauts est p^2.

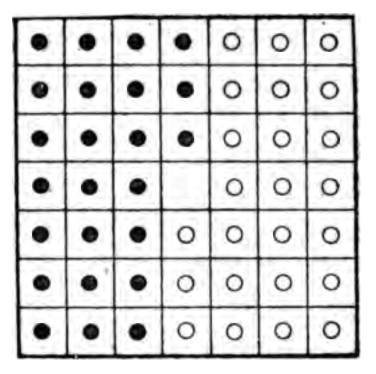
En ajoutant le nombre des pas au double du nombre des sauts on trouve $2p(p+1)$; c'est ce que l'on doit obtenir si l'on remarque que, pour occuper la case assignée, chaque pion doit avancer de $p+1$ cases, et par suite les $2p$ pions doivent exécuter $2p(p+1)$ déplacements d'une case.



QUADRILLE DES GRENOUILLES.

On peut encore se proposer le problème suivant : *On couv les cases d'un damier de 25 ou de 49 cases d'un nombre ég de pions blancs et de pions noirs, en laissant vide la case milieu; les pions sont symétriquement disposés par rapport*

Fig. 74.



centre de l'échiquier. On demande d'échanger les positions d pions noirs et des pions blancs.

On admet les règles du problème précédent et on les adop encore pour la colonne verticale du milieu (*fig.* 74).

Pour résoudre ce problème, on commence l'échange des pio de la ligne horizontale moyenne; on peut ensuite appliquer même procédé à la colonne moyenne; mais, si l'on remarqu d'après les tableaux précédents, que chaque case de cette colon est vide au moins une fois, pendant l'échange, on profitera de résultat pour échanger successivement les pions des autres lign horizontales. Par suite, le nombre de toutes les positions est é

à huit fois le nombre des coups pour l'échange d'une ligne, augmenté de l'unité.

Si le côté du carré est $2p + 1$, le nombre des positions est donc

$$(2p + 2)(p^2 + 2p) + 1,$$

c'est-à-dire

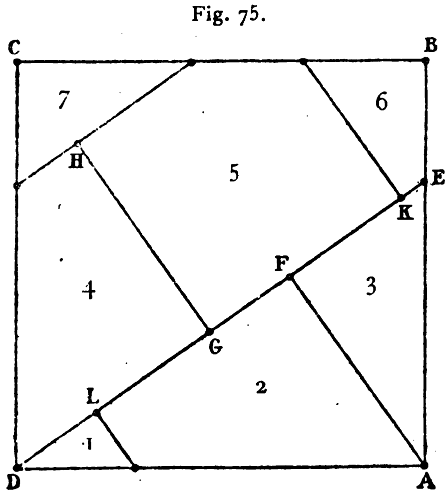
$$2p(p + 1)(p + 2) + 1;$$

le nombre des pas est $4p\,(p + 1)$ et le nombre des sauts est $2p^2(p + 1)$.

TRANSFORMATIONS D'UN CARRÉ.

Décomposer un carré en sept parties de manière qu'étant

Fig. 75.



convenablement assemblées, elles constituent séparément trois carrés égaux.

Soit ABCD (*fig.* 75) le carré donné; on prend une longueur

AE égale à la moitié de la diagonale du carré; on trace DE et l'on abaisse sur cette droite les perpendiculaires AF et CG. Puis on prend les longueurs GH, GK, FL égales à AF, et l'on termine la construction de la figure par des droites parallèles ou perpendiculaires à AF.

Il est facile de voir, par la considération de triangles semblables et par l'application du carré de l'hypoténuse, que l'on a

$$3\,\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2.$$

Si l'on découpe le carré en sept parties que nous avons numérotées, on peut les assembler en trois carrés séparés que nous avons représentés dans la *fig.* 76.

Fig. 76.

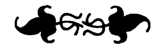
3
4
5
1
2
6
7

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'exactitude de ces résultats.

M. de Coatpont, colonel du Génie à Rennes, à qui l'on doit divers problèmes curieux et intéressants sur la *Géométrie de la double règle*, publiés dans le Tome II de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, a donné encore, dans le Tome III du même journal, diverses autres solutions du problème précédent. Il fait observer que le problème est indéterminé, et donne ces deux énoncés :

Découper un carré en un nombre minimum de parties telles que, groupées convenablement, elles constituent un nombre quelconque de carrés égaux entre eux.

Partager un carré en segments qui puissent constituer un nombre donné de carrés égaux.

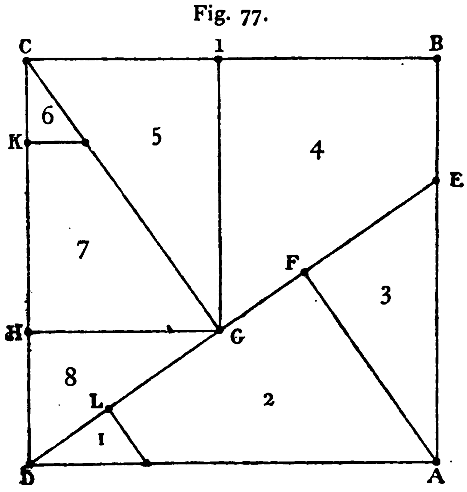


PROBLÈMES DE BUSSCHOP.

Voici deux autres transformations du carré :

Décomposer un carré en huit parties de manière qu'étant convenablement assemblées, elles constituent séparément deux carrés dont le plus grand soit double du plus petit.

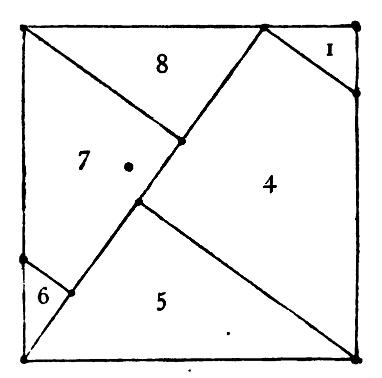
Fig. 77.



Après avoir déterminé comme précédemment les droites AF et

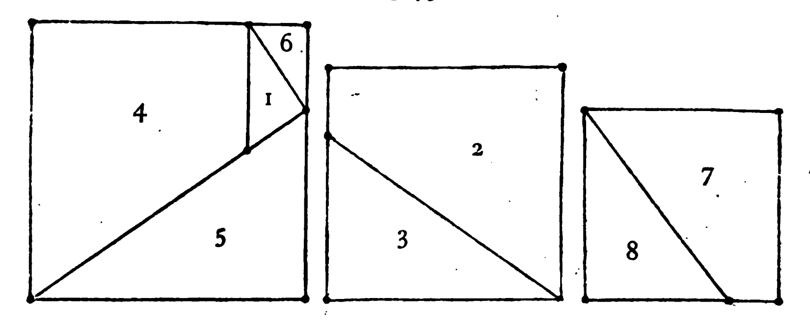
CG et le point L, on mène les parallèles GH et GI aux côtés du carré (*fig.* 77); on prend ensuite HK = GH. On décompose alors

Fig. 78.



facilement le carré en huit morceaux que l'on peut assembler en deux carrés vérifiant les conditions de l'énoncé; l'un d'eux est

Fig. 79.



représenté dans la *fig.* 78; l'autre, formé des fragments 2 et 3, est le carré moyen de la *fig.* 79.

Décomposer un carré en huit parties de manière qu'étant convenablement assemblées, elles constituent trois carrés dont les surfaces soient respectivement proportionnelles aux nombres 2, 3, 4.

On décompose le carré d'après la *fig.* 77; on peut assembler les huit morceaux conformément au modèle de la *fig.* 79.

On peut, avec ces résultats et les suivants, réaliser divers jeux de casse-tête chinois géométrique, en exécutant les constructions indiquées sur une feuille de carton ou sur une planchette, et en découpant les morceaux. Après les avoir déplacés, il s'agira de reconstituer les diverses figures indiquées.



TRANSFORMATION DE L'HEXAGONE RÉGULIER.

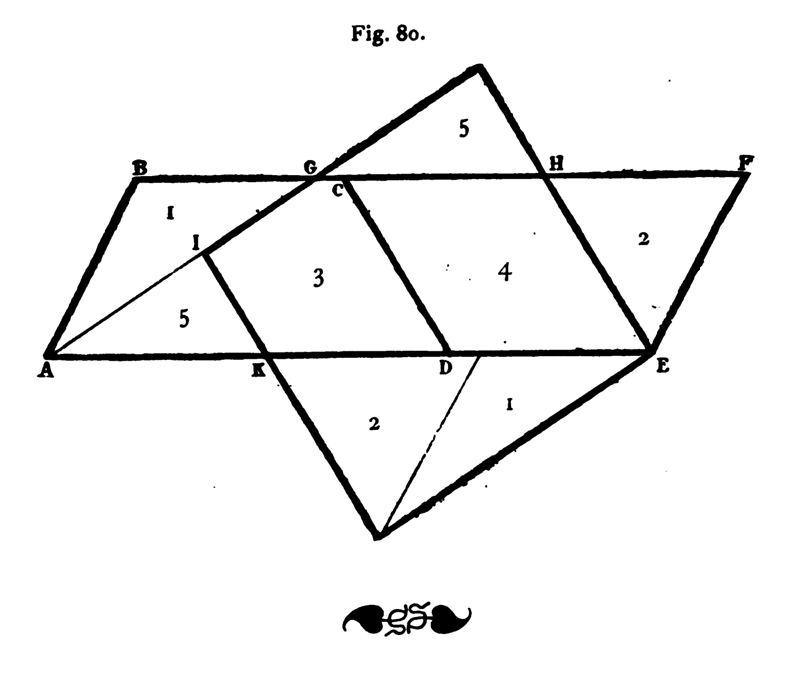
Décomposer un hexagone régulier en cinq parties de telle sorte qu'assemblées convenablement elles forment un carré.

On commence par diviser l'hexagone en deux parties égales, par un diamètre, et l'on forme avec ces deux parties un parallélogramme, en les plaçant l'une à côté de l'autre. Du point A comme centre avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle entre la longueur AE et la hauteur du parallélogramme, on trace un arc de cercle qui coupe la droite BF au point G. Puis, du sommet E, on abaisse une perpendiculaire EH sur le prolongement de AG, et on mène une droite IK parallèle à HE et à une distance de



cette dernière égale à AG. L'hexagone se trouve ainsi divisé en cinq parties que l'on peut assembler en carré (*fig.* 80).

Fig. 80.



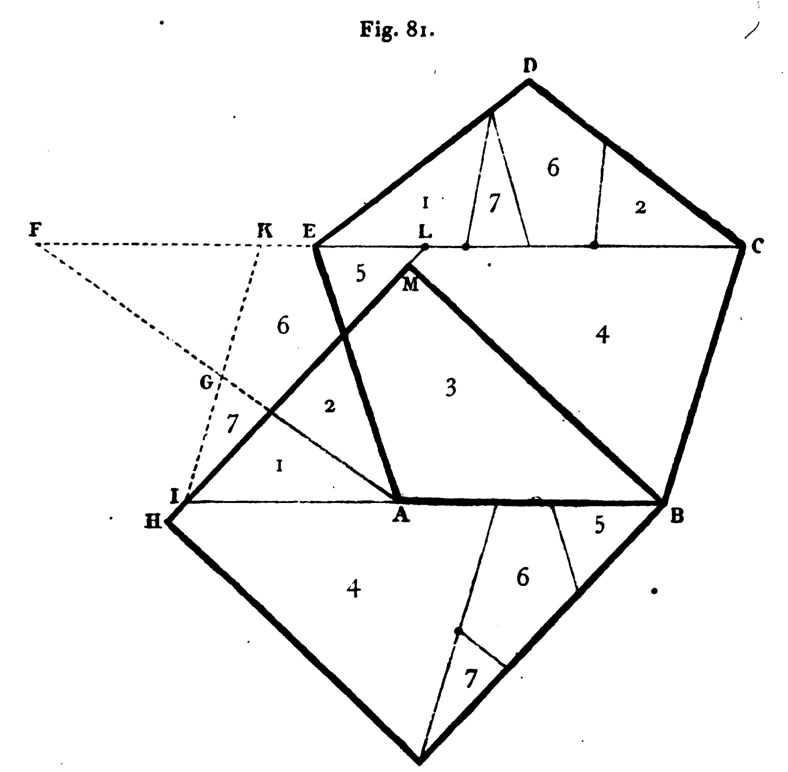
TRANSFORMATION DU PENTAGONE RÉGULIER.

Décomposer un pentagone régulier en sept parties, de manière qu'assemblées convenablement elles forment un carré.

Soit le pentagone régulier ABCDE (*fig.* 81); on prolonge la droite CE d'une longueur égale au côté du pentagone et l'on trace AF; on transforme ainsi le pentagone en un trapèze équivalent ABCF. Par le milieu G de AF on mène une parallèle

à BC; on transforme ainsi le trapèze en un parallélogramme équivalent IBCK. Du point I comme centre avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle de la longueur et de la hauteur de

Fig. 81.



ce parallélogramme, on décrit un arc de cercle qui vient couper CE au point L; on joint les points I et L, et l'on détermine ainsi les quatre morceaux du triangle CDE. Enfin, si du point B on abaisse une perpendiculaire sur IL, on découpe ABCE en trois autres morceaux.

Les problèmes contenus dans les trois paragraphes précédents sont dus à Paul Busschop; les transformations des carrés ont été publiées dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (T. II, p. 83); les autres transformations qui n'avaient pas été publiées, nous ont été gracieusement communiquées, avec le manuscrit de l'auteur, par M. Catalan, professeur à l'Université de Liége.

UN PARADOXE GÉOMÉTRIQUE.

Nous avons laissé au lecteur le soin de vérifier l'exactitude des divers résultats obtenus dans ces diverses transformations géométriques. Cependant nous devons faire observer que ces démonstrations sont indispensables, si l'on veut acquérir la certitude

Fig. 82.

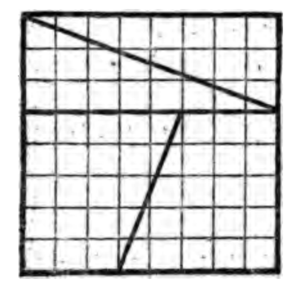
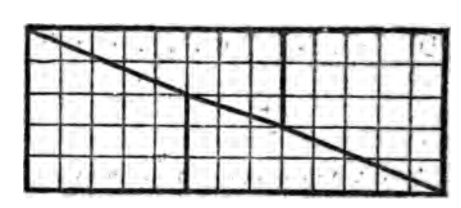


Fig. 83.



des théorèmes correspondants. Voici un curieux exemple de transformation qui fait comprendre la nécessité d'une démonstration. Considérons un carré formé de 64 cases (*fig.* 82); divisons-le en deux rectangles ayant pour hauteur la hauteur du

carré et pour bases 3 et 5 unités; divisons le petit rectangle en deux parties par une diagonale, et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Si l'on découpe le carré en ces quatre fragments, on peut les juxtaposer de manière à obtenir la *fig.* 83; mais celle-ci contient 65 carrés, pendant que l'autre en contient 64; on aurait donc $64 = 65$. L'explication de ce paradoxe est facile; nous avons supposé que les côtés des fragments placés le long de la diagonale du rectangle coïncidaient avec celle-ci; mais il n'en est pas ainsi, car ils laissent entre eux un espace vide équivalent à un carré. L'illusion produite résulte de la petite différence qui existe entre l'inclinaison de la diagonale du rectangle de côtés 5 et 13 sur le grand côté, et celle de la diagonale du rectangle de côtés 3 et 8 sur le grand côté. En effet, ces deux inclinaisons sont respectivement $\frac{5}{13}$ et $\frac{3}{8}$, dont la différence est

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{104}.$$

Les nombres 5, 8, 13 appartiennent à la série

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

que l'on obtient en ajoutant successivement deux termes consécutifs; elle a été indiquée pour la première fois par Léonard Fibonacci de Pise, mathématicien du XIIIe siècle. Dans cette série, le carré d'un terme quelconque diminué du produit des termes qui le comprennent est alternativement $+1$ et -1; ainsi

$$8^2 - 5.13 = -1,$$
$$21^2 - 13.34 = -1,$$
$$55^2 - 34.89 = -1,$$
$$\ldots\ldots;$$

on pourra donc remplacer le carré de 8 unités de côté, par des

carrés de 21 et 55 unités de côté, et l'on obtiendra des figures paradoxales d'approximation plus grande.

On a aussi

$$13^2 - 8.21 = +1,$$
$$34^2 - 21.55 = +1,$$
$$\ldots\ldots;$$

et l'on pourra employer des carrés de 13, 34, ..., cases de côté; mais, afin de reproduire l'illusion précédente, il faut d'abord construire le rectangle et le découper, de telle sorte que l'intervalle vide se produise dans le carré.

Si l'on observe que cette série provient du calcul des réduites de la fraction continue la plus simple

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}},$$

on peut considérer ces découpages comme une représentation géométrique de la grande approximation donnée par les fractions continues. Il serait donc facile de construire beaucoup de figures de ce genre.



LA QUADRATURE DU CERCLE.

On sait que, pour obtenir la longueur d'une circonférence, il faut multiplier le diamètre par un nombre fixe que l'on désigne habituellement par π et que, pour obtenir l'aire du cercle, il faut multiplier par π le carré du rayon. Archimède a donné le premier

la valeur approchée $\pi = \frac{22}{7}$; mais on connaît depuis longtemps la valeur de π avec une très grande approximation. On a remplacé la méthode des périmètres d'Archimède et la méthode des isopérimètres de Descartes par des méthodes qui reposent sur l'emploi des séries. C'est ainsi que Leibniz a donné la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$

et que Machin a donné celle-ci

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right];$$

avec cette dernière formule, un géomètre anglais, M. W. Shanks, a calculé π avec *cinq-cent trente* décimales.

On peut retenir facilement les trente premières décimales du nombre π au moyen du quatrain suivant :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Si l'on écrit successivement le nombre des lettres de chaque mot, on trouve ainsi les trente premières décimales

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ldots;$$

mais nous n'engageons personne à continuer ce travail poétique pour les 530 décimales du calcul de M. Shanks. Pour les usages ordinaires, quatre ou cinq décimales suffisent; nous donnerons comme exemple l'application suivante : *Connaissant le rayon d'un rouleau de papier peint et le nombre des feuilles depuis*

le centre jusqu'à la circonférence, déterminer la longueur
rouleau.

Si l'on désigne par l la longueur du rouleau, par r le rayon par n le nombre des feuilles, on peut considérer approxima vement le profil du rouleau comme un cercle de rayon r, qui pour surface πr^2; d'autre part, si l'on développait le rouleau, profil deviendrait un rectangle de longueur l et d'épaisseur $\frac{r}{n}$, a donc

$$l\frac{r}{n} = \pi r^2, \quad \text{d'où} \quad l = \pi r n.$$

Le problème de la quadrature du cercle consiste à trouver, p des constructions géométriques, le côté d'un carré équivalent cercle ayant l'unité pour rayon. Nous avons dit, dans notre pr mier volume (p. 167), que c'est un préjugé pour beaucoup de pe sonnes de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature cercle; mais il n'en est plus ainsi actuellement (*voir* la Note III

Lambert a démontré, en 1761, que le rapport de la circonf rence au diamètre est incommensurable; il était aussi démont que le carré de ce rapport est encore incommensurable [1]. D'aut part, dans un admirable mémoire *Sur la fonction exponentiell* M. Hermite avait démontré en 1874 que le nombre e, base c système des logarithmes népériens, est un nombre transcendan c'est-à-dire que le nombre e ne peut être la racine d'une équati de degré quelconque à coefficients entiers ou formés d'irratio nelles algébriques; mais l'illustre géomètre écrivait, dans u lettre à M. Borchardt : « Je ne me hasarderai point à la recherc d'une démonstration de la transcendance du nombre π. Q

(1) LEGENDRE. — *Éléments de Géométrie.* Note IV.

d'autres tentent l'entreprise; nul ne sera plus heureux que moi de leur succès; mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas de leur en coûter quelques efforts ».

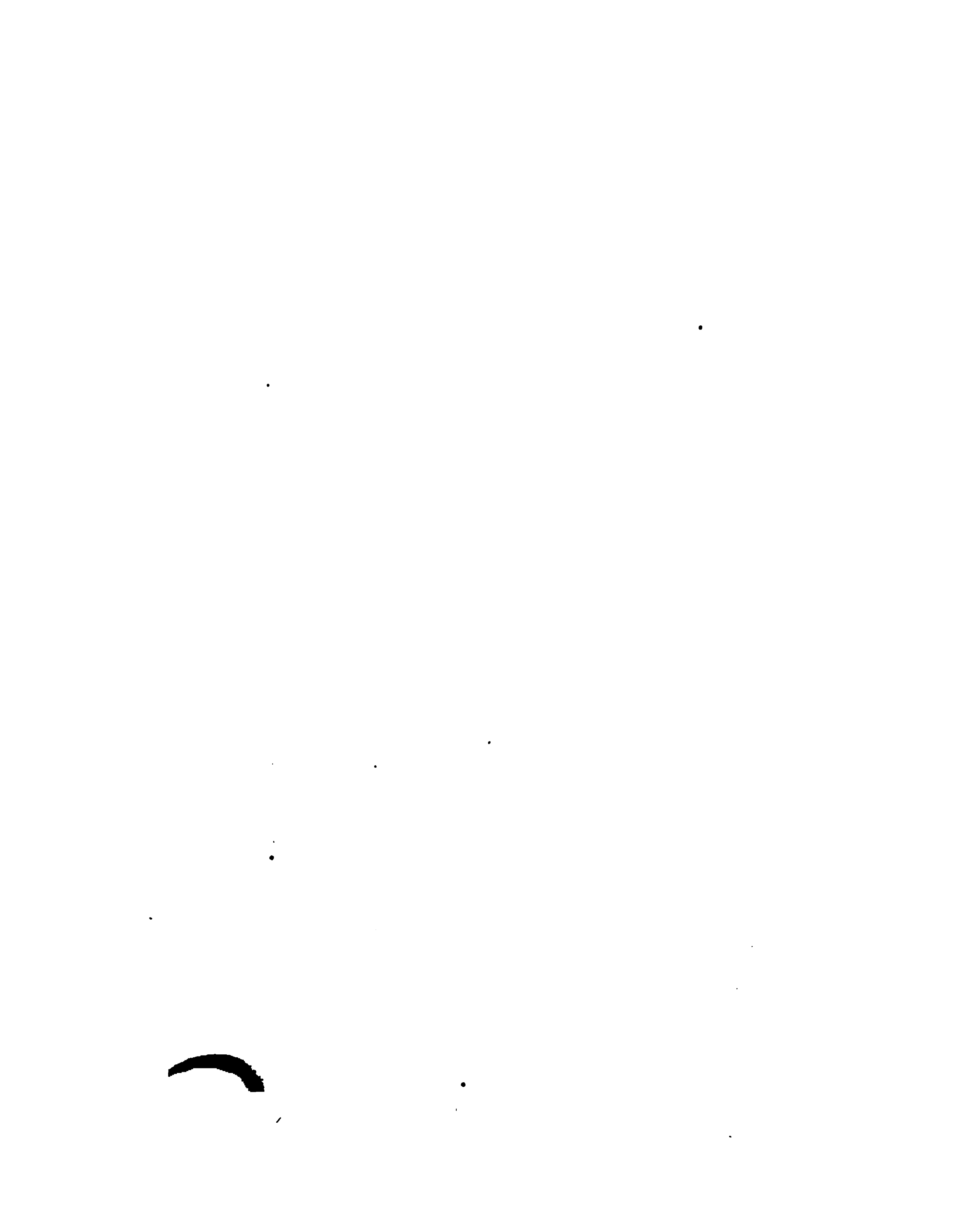
En 1882, M. Lindemann annonçait à l'Académie des Sciences qu'il était parvenu à démontrer la transcendance du nombre π, et qu'il avait déduit cette proposition des formules de M. Hermite; sa méthode n'en est qu'une généralisation, mais fort habile, qui repose sur la liaison mystérieuse des nombres e et π formulée par Euler

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

La cinquième édition de l'excellent *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse contient le résumé et la simplification des formules de M. Hermite et des recherches de M. Lindemann; M. Rouché ajoute que ce dernier travail si remarquable appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet, au moins sous le rapport de la simplicité. N'est-ce pas le cas de répéter avec Bacon : « Nous n'arriverons à quelque chose de définitif qu'après avoir longtemps vécu de provisoire. Mais ce provisoire ne nous fascinera pas, nous saurons qu'il n'est pas notre dernier but, et, dans le champ de la science, les plus hardis travailleurs n'oublieront pas qu'il faut d'abord faire une première vendange ».







SIXIÈME RÉCRÉATION.

—

LES JEUX DE DEMOISELLES.

A Monsieur Jules Develle, député de l'Eure.

Virginité du cœur, hélas ! sitôt ravie,
Songes riants, projets de bonheur et d'amour,
Fraîches illusions du matin de la vie !
Pourquoi ne pas durer jusqu'à la fin du jour !

(THÉOPHILE GAUTIER.)



SIXIÈME RÉCRÉATION.

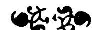
—

LES JEUX DE DEMOISELLES.

Les Grecs se plaisaient à donner à presque tous les jeux des jeunes filles une forme orchestrique. Quand une fête s'approchait, ne fallait-il pas préparer les cérémonies, répéter les chants, s'instruire dans les évolutions du chœur ? Les fêtes étaient nombreuses par toute la Grèce et les chœurs d'une diversité infinie. Leurs jeux devaient donc refléter leurs occupations préférées. Tantôt, elles se tiennent toutes par la main et l'une d'elles conduit le chœur qu'elle enroule et déroule à son gré, comme la jeune Orithie d'Apollonius aux bords de l'Ilissus. Tantôt, une ronde se forme, un collier, tel que nous le décrit Lucien. Les jeunes garçons alternent avec les jeunes filles; tous se tiennent par la main et forment ainsi un collier, les jeunes garçons donnant à leur danse une allure martiale, les jeunes filles affectant une tenue modeste et décente. C'est ainsi que l'on pourrait considérer comme des jeux de jeunes filles la plupart des danses qui nous sont décrites par les auteurs anciens (*Les Jeux des Anciens*, p. 35).

Les rondes enfantines, les colliers ou rondes alternées, les promenades des jeunes filles par deux ou par trois donnent lieu

à un certain nombre de problèmes nouveaux et intéressants qui se rapportent à la théorie des combinaisons. Parmi les diverses méthodes qui nous ont été indiquées, nous exposerons, de préférence, les solutions simples et ingénieuses de M. Walecki, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet.



LES RONDES ENFANTINES.

Des enfants dansent en rond en se tenant par la main; on demande comment il faut disposer les enfants, de telle sorte que chacun d'eux se trouve successivement voisin de tous les autres, soit à droite, soit à gauche, mais ne puisse l'être qu'une seule fois.

Nous observons tout d'abord que, dans chaque disposition circulaire, un enfant a deux voisins, l'un à droite, l'autre à gauche; par suite, puisque deux enfants ne peuvent se trouver plus d'une fois à côté l'un de l'autre, le nombre des voisins successifs d'un enfant quelconque sera toujours pair; par conséquent, pour que le problème soit possible, il faut nécessairement que le nombre total des enfants soit un nombre impair. Il reste donc à montrer que, lorsque le nombre des enfants est impair et égal à $2n+1$, on peut les faire entrer dans n rondes successives, mais de telle sorte que la condition exigée par l'énoncé soit toujours réalisée.

Désignons les enfants par les lettres de l'alphabet; divisons la circonférence en $2n$ parties égales (*fig.* 84); plaçons $2n$ lettres aux sommets du polygone régulier, et la lettre A sur le dia-

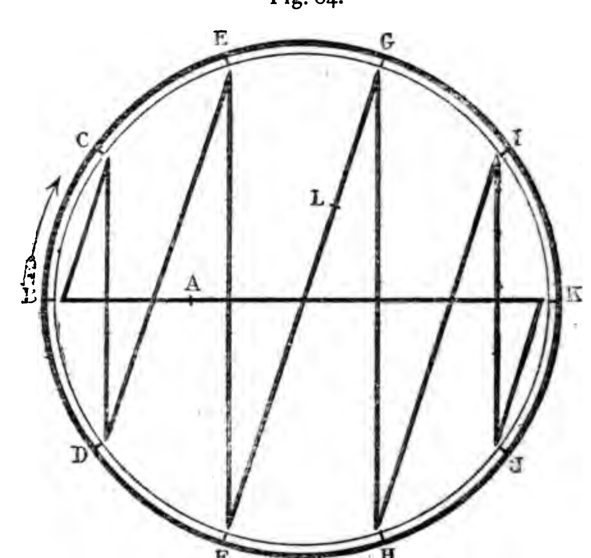
mètre [1]. Nous prendrons comme première ronde les enfants dans l'ordre

I. ABCDEFGHIJKA,

qui représente l'une quelconque des permutations circulaires de $2n+1$ lettres [2].

Cela posé, pour obtenir une seconde disposition des enfants.

Fig. 84.



nous considérerons l'ensemble des lignes droites de la figure comme une aiguille mobile que nous ferons tourner d'une division dans

(1) Dans le problème actuel, il ne faut pas tenir compte de la lettre L dans la *fig.* 84.

(2) Nous avons démontré, dans notre récréation sur le jeu du taquin, que le nombre des permutations circulaires de q lettres est égal au produit des $q-1$ premiers nombres entiers. (T. I, p. 195).

le sens des aiguilles d'une montre, en emportant la lettre A, pendant que les autres lettres resteront immobiles sur le contour. Nous aurons ainsi, en suivant les zigzags de l'aiguille, la deuxième ronde

II. ACEBGDIFKHJA.

Si l'on fait tourner l'aiguille dans le même sens de deux, trois, quatre divisions, on obtient les autres rondes

III. AEGCIBKDJFHA,
IV. AGIEKCJBHDFA,
V. AIKGJEHCFBDA.

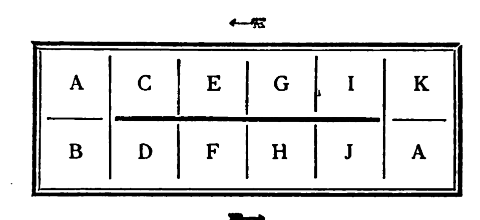
Dans le cas général, on fait tourner successivement l'aiguille, de telle sorte que l'un des sommets du polygone brisé formé par l'aiguille vienne occuper n divisions consécutives de la circonférence. Nous avons ainsi formé n permutations circulaires des $2n+1$ lettres, telles que deux lettres voisines dans l'une de ces permutations ne le sont plus dans aucune autre. En effet, nous avons deux cas à considérer, suivant que l'une de ces lettres occupe l'intérieur ou l'une des divisions de la circonférence. Pour que deux lettres dont l'une est A soient voisines, il faut et il suffit que le diamètre de l'aiguille mobile passe par l'autre, ce qui arrive une fois et une seule. Pour que deux lettres du pourtour soient voisines, il faut et il suffit que la droite qui les joint soit parallèle à l'un des côtés du polygone de l'aiguille mobile; or, toutes les directions des côtés de ce polygone sont différentes dans les n positions de l'aiguille.



LE PROCÉDÉ DU TAQUIN.

On peut encore résoudre le problème par l'emploi du taquin. Supposons les enfants au nombre de onze; écrivons leurs noms ou les lettres qui les distinguent sur l'une des faces de onze cubes

Fig. 85.



égaux analogues à ceux du jeu du taquin, et renfermons tous ces cubes dans une boîte rectangulaire (*fig.* 85) dans laquelle la ligne pleine est une barrière infranchissable. Convenons de lire les lettres de chacune des positions des cubes dans l'ordre de la première ronde ABCDEFGHIJKA qui forme dans la boîte un zigzag toujours le même. Pour obtenir la deuxième ronde, il suffit d'enlever les cubes A, de déplacer tous les autres d'une case, dans le sens de la flèche, puis de descendre le cube placé à gauche, de remonter le cube placé à droite et de replacer les deux cubes enlevés. Pour les rondes suivantes, on recommence la manœuvre.

On obtient les dispositions du paragraphe précédent; en effet, cela revient à supposer l'aiguille immobile (*fig.* 84) et à déplacer en même temps toutes les lettres de la circonférence de une, deux, trois, etc., divisions dans le sens opposé à celui des aiguilles



d'une montre. Si l'on déforme le polygone de l'aiguille ainsi que la circonférence, de telle sorte que celle-ci se trouve remplacée par le périmètre d'un rectangle, on retrouve le procédé du taquin.



LES RONDES PAIRES.

Nous avons supposé jusqu'ici que le nombre des enfants de la ronde est impair, et nous avons montré que le problème proposé est impossible lorsque le nombre des enfants est pair. Cependant, dans ce dernier cas, on peut modifier l'énoncé des deux manières suivantes :

Des enfants en nombre pair dansent en rond et se tiennent par la main; on demande comment il faut disposer les enfants dans leurs rondes successives, de telle sorte que chacun d'eux soit voisin de tous les autres, à l'exception d'un seul, et ne puisse l'être qu'une seule fois?

Désignons encore les enfants par les premières lettres de l'alphabet, et supposons-les au nombre de douze; nous diviserons la circonférence en dix parties égales (*fig.* 84) et nous tracerons la ligne brisée ABCDE..., qui correspond, comme dans le problème des rondes impaires, aux onze premiers enfants. Puis nous plaçons une douzième lettre L sur le second diamètre FG de l'aiguille. En suivant le zigzag de celle-ci, on obtient pour la première ronde

I. ABCDEFLGHIJKA.

Cela posé, pour obtenir une seconde disposition, nous ferons tourner l'aiguille d'une division et nous obtiendrons la ronde

II. ACEBGDLIFKHJA.

Pour obtenir les trois autres rondes, nous ferons encore avancer trois fois l'aiguille d'une seule division.

Il est facile de voir que les rondes sont toutes distinctes. Quant aux lettres qui ne sont jamais voisines, ce sont les deux lettres A et L placées sur les deux diamètres, et, en plus, les couples de lettres diamétralement opposées. Dans le cas général, si le nombre des enfants est $2n$, le nombre des rondes distinctes est $n - 1$.

Des enfants en nombre pair se tiennent par la main et dansent une ronde; comment faut-il les disposer dans leurs rondes successives de telle sorte que chacun d'eux soit deux fois voisin de l'un d'entre eux, et une seule fois voisin de tous les autres?

Supposons les enfants au nombre de dix, et désignons-les par les lettres B, C, D, E, F, G, H, I, J, K. Divisons la circonférence en dix parties égales, et formons la *fig.* 84 (1); si l'on opère comme dans les problèmes précédents, par le mouvement de l'aiguille, on obtiendra cinq rondes successives, qui ne diffèrent des cinq rondes du premier problème de cette récréation que par la suppression de la lettre A. Deux lettres diamétralement opposées sont deux fois voisines, puisqu'il y a deux diamètres dans l'aiguille; mais deux lettres non diamétralement opposées ne le sont qu'une seule fois, puisque les orientations de l'aiguille sont

(1) Pour le problème actuel, il ne faut pas tenir compte des lettres A et L dans la *fig.* 84.

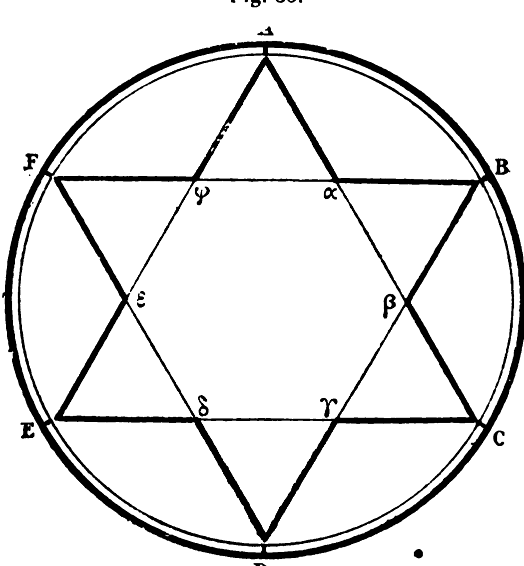
toutes différentes. Dans le cas général, si le nombre des enfants est pair, le nombre des rondes distinctes en est la moitié.



LES RONDES ALTERNÉES.

Des jeunes garçons et des jeunes filles dansent une ronde en se donnant la main : on demande comment on doit effectuer les

Fig. 86.



rondes successives de telle sorte que chacun des garçons soit voisin, une seule fois, de chacune des jeunes filles, et que chaque jeune fille soit voisine une seule fois de tous les garçons?

Désignons les garçons, en nombre n, par les lettres de l'alphabet, et les jeunes filles, en nombre égal, par les lettres grecques correspondantes. On observera tout d'abord que chacun des n garçons devant être voisin de chacune des jeunes filles, il y a n^2 voisinages à réaliser; mais chacune des rondes donne lieu à $2n$ voisinages; donc le nombre total des rondes doit être égal au quotient de n^2 par $2n$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}n$. Par conséquent, pour que le problème soit possible, il faut que les garçons soient en nombre pair.

Cela posé, divisons la circonférence en n parties égales, et joignons les points de division de deux en deux; les lignes de jonction forment deux polygones réguliers de $\frac{1}{2}n$ côtés. Plaçons les garçons aux points de division sur la circonférence en A, B, C, D,... (*fig.* 86), et plaçons les jeunes filles en α, β, γ, δ,... Nous considérerons, pour la première ronde, en suivant les contours de l'étoile, le cycle

$$A\ \alpha\ B\ \beta\ C\ \gamma\ D\ \delta\ E\ \varepsilon\ F\ \varphi.$$

Pour obtenir une deuxième ronde alternée, nous ferons tourner l'étoile, comme une aiguille, de deux divisions; si les lettres grecques qui représentent les jeunes filles sont emportées dans le mouvement de l'aiguille, pendant que les garçons restent immobiles, Mademoiselle α, qui se trouvait d'abord entre Messieurs A et B, se trouvera ensuite entre Messieurs C et D, et si l'on fait tourner successivement l'aiguille de deux divisions, chaque rotation élémentaire lui donne deux nouveaux voisins; après $\frac{1}{2}n$ rotations, elle se retrouve dans la position primitive, après avoir été voisine, une seule fois, de tous les garçons.

Lorsque le nombre des garçons est impair, on opère de même, mais en faisant tourner l'aiguille d'une seule division; alors

chacune des jeunes filles se trouve deux fois voisine de tous les garçons, une fois à droite et une fois à gauche.



LE JEU DE LA TORTUE.

Voici en quoi, selon Pollux, consistait le jeu de la *Tortue :* Une jeune fille s'asseoit au milieu d'autres jeunes filles; on l'appelle la Tortue. Les jeunes filles courent en cercle autour d'elle en lui demandant : « Torti-tortue, que fais-tu là au milieu ? » Elle répond : « Je dévide la laine et le fil de Milet. » Et ses compagnes reprenant : « Mais ton fils, comment a-t-il péri ? » La Tortue répond : « Du haut des chevaux blancs, il a sauté dans la mer. »

Dans la Tortue, dans les vagues symbolisées par les chevaux blancs, on reconnaît un jeu né sur le rivage de la mer. Ce jeu, auquel on pourrait comparer les rondes chantées qui sont parmi nous des divertissements aimés des jeunes filles, ressemble, sans qu'on doive s'en étonner, à bien des jeux actuellement encore en usage chez les Grecs. « C'est ainsi, dit M. de Marcellus, que, sur la plage de Scio, au bruit des vagues adoucies par une faible brise du soir, j'ai vu les jeunes Grecques, se tenant par la main, se balancer autour de l'une d'entre elles, placée au centre, et ne rompre la chaîne pour dégager la prisonnière que lorsque celle-ci avait répondu par un distique au distique sentimental entonné par le chœur joyeux. Ainsi, sous l'ombre des grands platanes d'Unkiar-Skelessi, sur la rive asiatique du Bosphore, j'ai vu des femmes turques, le visage voilé, s'accroupir en rond, tournant le dos au spectateur curieux et presque toujours injurié; puis toutes ensemble répliquer par des fredons monotones et tremblés aux

cris que leurs beaux enfants, chargés de fleurs et de pièces d'or, jetaient en courant autour d'elles. C'était l'antique jeu de la Tortue modifié par les siècles et par le caractère propre à chaque nation. »

Le jeu de la Tortue nous conduit à reprendre quelques-uns des problèmes précédents, avec diverses modifications dans les rondes enfantines, par l'introduction d'une ou de deux personnes au centre de la ronde. Ces problèmes se rapportent encore à la théorie des combinaisons.



LES RONDES A CENTRE.

Des enfants dansent en rond, en se donnant la main, autour d'un autre placé au centre. On demande comment il faut disposer les enfants, dans leurs rondes successives, de telle sorte que chacun d'eux se trouve une fois au centre, et deux fois voisin de tous ses camarades.

Pour fixer les idées, supposons que les enfants soient au nombre de treize; divisons la circonférence en douze parties égales, joignons les points de division comme nous l'avons fait dans la *fig.* 87. Nous prendrons comme première ronde

I. BCDEFGHIJKLMB et A au centre.

Nous prendrons, comme deuxième ronde en suivant le zigzag de la figure,

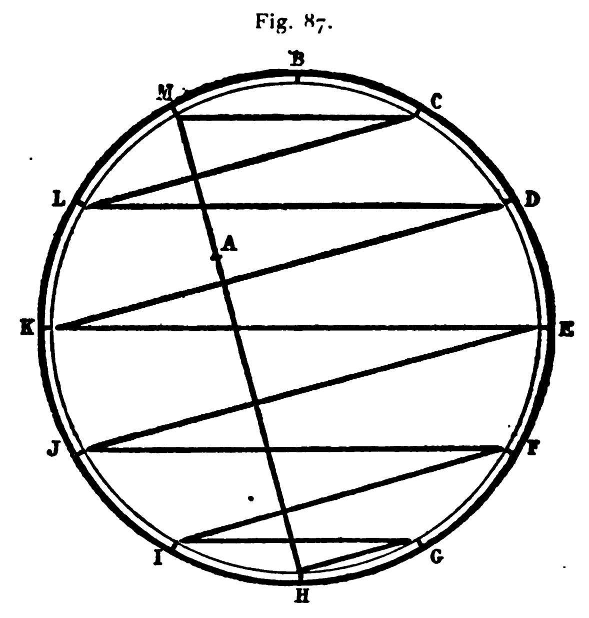
II. AMCLDKEJFIGHA et B au centre.

Pour obtenir la troisième ronde, nous ferons tourner le zigzag comme une aiguille et d'une division dans le sens BC; la lettre C se trouvera isolée à son tour, et nous aurons

III. ABDMELFKGJHIA et C au centre;

et ainsi de suite, de manière à former les treize rondes exigées par l'énoncé.

Fig. 87.

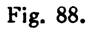


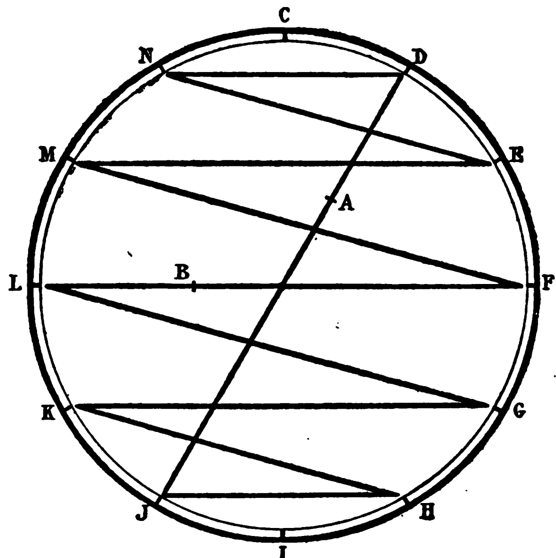
En effet, il est évident que chacune des lettres se trouve une seule fois au centre. De plus, deux lettres consécutives, qui sont voisines dans la première ronde, sont encore voisines lorsque la corde de l'aiguille qui sous-tend un douzième de la circonférence se trouve dans la position convenable, ce qui n'arrive encore qu'une seule fois. On observera, en outre, que les cordes de l'aiguille mobile ont toujours des inclinaisons différentes dans les positions successives de l'aiguille.

Il résulte surabondamment de ce qui précède que l'on ne sau-



rait former des rondes à centre où chaque enfant soit une seule fois au centre, et une seule fois voisin de chacun de ses camarades.


Fig. 88.



Des enfants dansent en rond, en se donnant la main, autour de deux autres placés au centre. On demande comment il faut disposer les enfants, dans leurs rondes successives, de telle sorte que chacun d'eux se trouve une fois au centre, et une seule fois voisin de tous ses camarades.

Il est d'abord évident que le nombre des enfants doit être un nombre pair. Pour fixer les idées, nous supposerons les enfants au nombre de quatorze; divisons la circonférence en douze parties égales, et joignons les points de division (*fig.* 88). Nous prendrons comme première ronde

I. CDEFGHIJKLMNC et AB au milieu.

Nous prendrons comme deuxième ronde, en suivant le zigzag de la figure, et intercalant A et B,

II. ADNEMFBLGKHJA et CI au milieu.

Pour obtenir la troisième ronde, nous ferons tourner l'aiguille d'une division dans le sens CD; les lettres D et J se trouveront isolées, et nous aurons

III. AECFNGBMHLIKA et DJ au milieu.

Nous formerons ainsi successivement les sept rondes exigées par l'énoncé.

En effet, les lettres A et B, et les couples formés par les lettres opposées diamétralement se trouvent successivement au centre. De plus, deux lettres consécutives qui sont voisines dans la première ronde ne le sont plus dans les autres, puisque l'aiguille ne contient pas le côté du dodécagone. En outre, on observera que les cordes de l'aiguille mobile ont toujours des inclinaisons différentes dans les diverses positions de l'aiguille.



LA GRUE ET LE MONÔME.

Les labyrinthes ont été l'origine d'un jeu ou d'une danse que l'on appelait la *Grue*, et que, de nos jours, on appelle le *Monôme*. A l'imitation de ces oiseaux qui volent en longues files, les danseurs se tenaient par la main et décrivaient, guidés par le conducteur du chœur, des tours et des détours rappelant les circonvolutions et les ramifications des labyrinthes. Cette danse figure sur le bouclier d'Achille. (*Iliade*, XVIII, 596.)

Plutarque en attribue l'invention à Thésée. Après avoir vaincu le Minotaure, Thésée passant à Délos voulut honorer Apollon par une cérémonie nouvelle. Il exécuta une danse, que les habitants de Délos ont conservée, dans laquelle on décrit des tours et des détours à l'imitation des circuits du labyrinthe. Elle s'appelait la *Grue*. (*Thésée*, XXI.)

Le *Monôme* est la transformation d'un jeu d'enfants, renouvelé de la danse antique de la *Grue*. Après avoir terminé les compositions écrites pour l'admission à l'École Polytechnique, les candidats des lycées et des écoles préparatoires se réunissent, à Paris, dans le jardin du Luxembourg. Puis, sous la conduite du plus grand, ils traversent les boulevards, processionnellement, les mains placées sur les épaules du camarade qui précède. Ils se rendent ensuite dans la cour du Collège de France, où commencent, quelques jours après, les examens oraux; arrivés là, ils y décrivent les diverses circonvolutions de la courbe représentant le résultat de la composition de Mathématiques. Cette coutume est déjà ancienne; mais on ne dit pas si les futurs polytechniciens ont voulu, en la conservant, honorer la mémoire de Descartes, l'inventeur de la Géométrie analytique.

Ces divers jeux nous conduisent tout naturellement aux problèmes suivants qui concernent les files et les promenades d'un pensionnat.



LES FILES INDIENNES.

Des enfants se promènent l'un derrière l'autre suivant une file rectiligne; on demande comment il faut disposer les files

successives de telle sorte que chacun des enfants se trouve une fois, et une seule, voisin de tous les autres.

Désignons par n le nombre des enfants ; nous observerons tout d'abord que chacun des enfants devant être voisin de tous les autres, il y a $\frac{1}{2} n (n - 1)$ voisinages à réaliser ; c'est le nombre des combinaisons de n objets pris deux à deux ; mais chacune des files donne lieu à $n - 1$ voisinages ; par conséquent, le nombre des files possibles est égal à $\frac{1}{2} n$. Donc, pour que le problème soit résoluble, il faut que le nombre des enfants soit pair.

Pour obtenir les files, on ajoute une lettre supplémentaire aux lettres qui désignent les enfants ; on forme toutes les rondes impaires des $n + 1$ lettres ; cela fait, on ouvre la ronde à l'endroit de la lettre supplémentaire introduite, et l'on supprime cette lettre. On obtient ainsi toutes les permutations rectilignes demandées par l'énoncé.

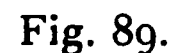
Remarque. — Chacun des enfants se trouvera isolé une seule fois, au commencement ou à la fin de la file indienne. On double le nombre des files, en les formant en sens inverse ; mais alors, chacun des enfants se trouve voisin deux fois de tous les autres, une fois en avant, et une fois en arrière.

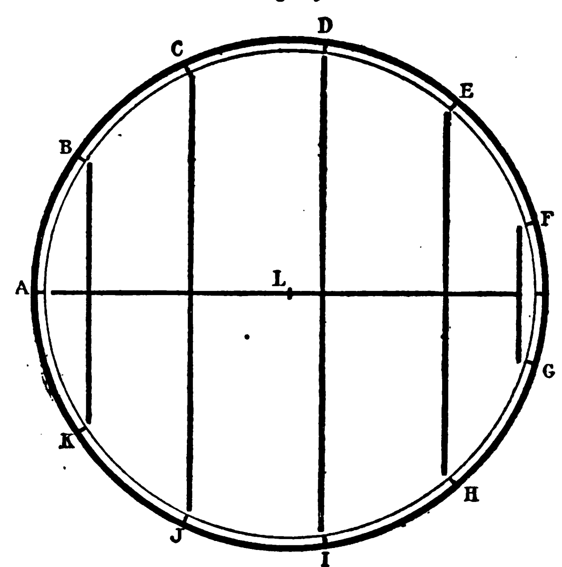


LES PROMENADES DU PENSIONNAT.

Un pensionnat renferme un nombre pair de jeunes filles qui se promènent tous les jours deux par deux ; on demande comment il faut disposer les promenades de telle sorte qu'une jeune fille se trouve successivement en compagnie de toutes les autres, mais ne puisse s'y trouver plus d'une fois.

Supposons, pour fixer les idées, que le pensionnat renferme douze demoiselles que nous désignerons par les douze premières lettres de l'alphabet. Divisons une circonférence en onze parties égales; plaçons au centre l'une des lettres, L, et les autres aux points de division de la circonférence, dans un ordre quelconque; puis, traçons les lignes droites de la *fig.* 89;


Fig. 89.



nous grouperons les jeunes filles deux par deux, pour la première promenade, en plaçant A avec L, et les autres suivant les lignes parallèles, de telle sorte que la première promenade se compose de six groupes :

I. AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Pour obtenir les groupes de la seconde promenade, nous con-

sidérerons l'ensemble des lignes droites de la figure comme une aiguille mobile que nous ferons tourner d'une division dans le sens des aiguilles d'une montre, pendant que les lettres resteront immobiles sur le contour; nous aurons ainsi pour la seconde promenade les groupes

II. BL, CA, DK, EJ, FI, GH.

Si l'on fait encore tourner l'aiguille dans le même sens de une, deux, trois divisions, on obtient pour les promenades des jours suivants:

III. CL, DB, EA, FK, GJ, HI;
IV. DL, EC, FB, GA, HK, IJ;
V. EL, FD, GC, HB, IA, JK;

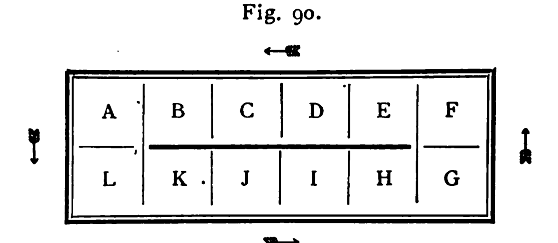
et ainsi de suite, de telle sorte que l'on obtient onze promenades, comprenant chaque fois toutes les jeunes filles. Il nous reste à montrer que deux jeunes filles d'un même groupe d'une promenade appartiennent à des groupes différents pour toutes les autres promenades. En effet, nous avons deux cas à considérer, suivant que l'une des lettres qui représentent les jeunes filles occupe le centre ou l'une des divisions de la circonférence. Pour que deux lettres dont l'une est au centre appartiennent au même groupe, il faut et il suffit que le diamètre de l'aiguille mobile passe par l'autre, ce qui arrive une fois et une seule. Pour que deux lettres du pourtour soient dans le même groupe, il faut et il suffit que la droite qui les joint soit perpendiculaire à l'axe de l'aiguille; or les directions de l'axe ou celles des perpendiculaires sont différentes dans les onze positions de l'aiguille.



ENCORE LE TAQUIN.

On peut encore résoudre le problème des promenades du pensionnat par l'emploi du Taquin. Soient AB... KL les cubes du Taquin élémentaire (*fig.* 90) servant à distinguer les jeunes

Fig. 90.



personnes. Convenons de lire chaque promenade en groupant les cubes deux à deux par colonnes verticales, c'est-à-dire pour la première promenade suivant l'ordre

AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Pour obtenir la seconde promenade, il suffit d'enlever le cube L, d'abaisser le cube A, d'avancer d'un rang vers la gauche les cubes de la ligne supérieure, de monter le cube G, puis de déplacer d'un rang vers la droite tous les cubes de la ligne inférieure; enfin de replacer le cube L sur la case vide, de telle sorte que L est revenu au même endroit.

On obtient les mêmes promenades que par l'emploi de l'aiguille; cela revient, en effet, à supposer immobile l'aiguille de la *fig.* 89, et à déplacer en même temps toutes les lettres de la circonférence de une, deux, trois, etc., divisions dans le sens opposé

à celui de l'aiguille. Si l'on déforme le polygone de l'aiguille, en supposant égales toutes les cordes, ainsi que le périmètre de la circonférence, de telle sorte que celle-ci se trouve remplacée par le périmètre d'un rectangle, on retrouve identiquement le procédé du Taquin élémentaire.

LES MONITRICES.

Nous avons supposé, dans les deux paragraphes précédents, que les jeunes pensionnaires se trouvent en nombre pair, le problème étant impossible pour un nombre impair. Cependant, dans ce dernier cas, on peut modifier l'énoncé de la manière suivante :

Un pensionnat renferme un nombre impair de jeunes filles qui se promènent tous les jours deux par deux, à l'exception d'une seule qui joue le rôle de monitrice; on demande comment il faut disposer les promenades de telle sorte que chaque jeune fille se trouve une seule fois en compagnie de toutes les autres et une seule fois monitrice.

En admettant qu'il y ait onze jeunes filles, on divise la circonférence en onze parties égales, et l'on construit la *fig.* 89 en ne tenant pas compte de la lettre L placée au centre. On fait tourner l'aiguille de une, deux, trois, etc., divisions ; la monitrice est indiquée par la lettre placée à l'extrémité du diamètre de l'aiguille, tandis que les écolières se trouvent groupées deux par deux, aux extrémités des cordes perpendiculaires.

Le problème se déduit encore du problème des douze pensionnaires, en supprimant dans les promenades la lettre L. On peut d'ailleurs se servir encore du procédé du Taquin.

Remarque. — Si l'on écrit toutes les promenades des élèves, en les supposant soit en nombre pair soit en nombre impair, on forme évidemment le tableau complet de toutes les combinaisons des élèves deux à deux, ainsi qu'il est facile de le vérifier par un calcul direct.



LES TRIADES DES NEUF MUSES.

Les neuf muses étant groupées trois par trois, on demande comment il faut disposer leurs réunions de telle sorte que chacune d'elles se trouve successivement dans une triade avec toutes les autres, mais ne puisse s'y trouver qu'une seule fois.

Nous observerons tout d'abord que dans chaque réunion complète, une muse a deux compagnes; mais puisque deux muses ne peuvent être ensemble plus d'une fois dans une même triade, le nombre des réunions doit être égal à quatre. Il reste à faire voir que le problème est possible. Pour cela, nous désignerons l'une quelconque des muses, Polymnie, par exemple, par la lettre p ; Melpomène et Uranie, par a_1 et a_2 ; Euterpe et Erato par b_1 et b_2 ; Calliope et Clio par c_1 et c_2 ; enfin Terpsichore et Thalie, par d_1 et d_2. On peut d'ailleurs changer l'ordre précédent, en prenant une permutation quelconque des neuf lettres. Cela posé, considérons les quatre triades

$$p\,a_1\,a_2,\quad p\,b_1\,b_2,\quad p\,c_1\,c_2,\quad p\,d_1\,d_2;$$

elles appartiennent à quatre réunions différentes, puisque, dans chacune d'elles, la lettre p ne peut entrer qu'une seule fois. Formons maintenant les combinaisons trois à trois des quatre lettres a, b, c, d; ces combinaisons sont bcd, cda, dab, abc.

Plaçons deux fois chacune d'elles au-dessous des quatre triades précédentes, mais de telle sorte que dans chaque colonne verticale on ne trouve plus les lettres de la première ligne ; nous obtenons ainsi le tableau

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} p\,a_1a_2 & p\,b_1b_2 & p\,c_1c_2 & p\,d_1d_2 \\ b\,c\,d & c\,d\,a & d\,a\,b & a\,b\,c \\ b\,c\,d & c\,d\,a & d\,a\,b & a\,b\,c \end{array}\right|.$$

Il nous reste à placer les indices 1 et 2 dans les deux dernières lignes, de telle sorte que les conditions de l'énoncé soient remplies ; on écrit immédiatement les indices de la première disposition, et des premières colonnes des trois autres ainsi qu'il suit :

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} p\,a_1a_2 & p\,b_1\,b_2 & p\,c_1\,c_2 & p\,d_1\,d_2 \\ b_1c_1d_1 & c_1\,d\,a & d_1\,a\,b & a_1\,b\,c \\ b_2c_2d_2 & c_2\,d\,a & d_2\,a\,b & a_2\,b\,c \end{array}\right|.$$

Puisque b_1 se trouve avec c_1 dans la première réunion, b_1 se trouvera avec c_2 dans une autre ; de même pour c et d, et pour b et d ; on aura donc nécessairement le tableau suivant :

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} p\,a_1a_2 & p\,b_1b_2 & p\,c_1c_2 & p\,d_1\,d_2 \\ b_1c_1d_1 & c_1d_2a & d_1\,a\,b_2 & a_1\,b\,c \\ b_2c_2d_2 & c_2d_1a & d_2\,a\,b_1 & a_2\,b\,c \end{array}\right|.$$

Plaçons les indices 1 et 2 aux lettres a de la seconde réunion, d'une manière quelconque, nous obtenons le même ordre dans la disposition, et la quatrième réunion s'en déduit facilement.

En résumé, on réunira les neuf muses suivant les quatre groupes différents :

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} p\,a_1a_2 & p\,b_1b_2 & p\,c_1c_2 & p\,d_1d_2 \\ b_1c_1d_1 & c_1d_2a_1 & d_1a_1b_2 & a_1b_1c_2 \\ b_2c_2d_2 & c_2d_1a_2 & d_2a_2b_1 & a_2b_2c_1 \end{array}\right|.$$

Nous indiquons plus loin une méthode très simple due à M. Walecki ; on doit considérer la précédente comme une introduction à la méthode de M. Frost que nous développons dans le paragraphe suivant.



LES QUINZE DEMOISELLES.

Le problème des quinze jeunes filles a été proposé pour la première fois, en 1851, par M. Kirkman, à qui l'on doit encore des théorèmes fort intéressants sur la figure de l'*Hexagramme mystique* de Pascal. Ce problème sut attirer immédiatement l'attention de MM. Cayley et Sylvester, et de plusieurs autres mathématiciens qui ont publié leurs recherches dans les journaux et les revues scientifiques de l'Angleterre et de l'Amérique. Nous pensons que c'est pour la première fois que ce problème, et d'autres du même genre que ceux qui précèdent, sont actuellement publiés en France. Bien qu'ils se rattachent directement aux premiers éléments de la théorie des combinaisons, ils présentent d'assez grandes difficultés dont on se rendra compte en cherchant directement la solution du problème suivant :

Quinze jeunes filles se promènent journellement trois par trois ; on demande comment il faut arranger leurs promenades

de telle sorte que chacune des jeunes filles se trouve successivement une seule fois en compagnie de toutes les autres.

Nous exposerons la solution qui a été donnée de ce problème par le révérend A.-H. Frost, dans le *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics* (n° 41, Cambridge, 1870).

Nous observons d'abord que chacune des jeunes filles doit se trouver chaque jour avec deux de ses compagnes; par conséquent il ne peut y avoir plus de sept promenades. De plus, nous allons démontrer qu'il est possible de disposer les jeunes filles conformément aux conditions de l'énoncé pendant les sept jours de la semaine. Désignons par p l'une quelconque des jeunes filles; nous pourrons désigner par a_1 et a_2 les jeunes filles qui se promènent avec Mademoiselle p le dimanche; par b_1 et b_2 celles qui se promènent avec p le lundi; par c_1 et c_2 celles qui se promènent avec p le mardi, et ainsi de suite; enfin par g_1 et g_2 celles qui se promènent avec p le samedi.

Nous avons donc à placer sous les sept triades ou combinaisons trois à trois

$$| \; pa_1a_2 \; | \; pb_1b_2 \; | \; pc_1c_2 \; | \; pd_1d_2 \; | \; pe_1e_2 \; | \; pf_1f_2 \; | \; pg_1g_2 \; |$$

sept assortiments de quatre triades formées avec les quatorze lettres $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, g_1, g_2$, en exceptant p, et de telle sorte que deux de ces lettres ne se trouvent pas ensemble dans plus d'une seule triade. Pour l'instant, représentons a_1 et a_2 par a, b_1 et b_2 par b, et ainsi de suite; les sept lettres a, b, c, d, e, f, g peuvent être diversement combinées en sept triades, de telle sorte que deux de ces lettres ne se trouvent pas ensemble plus d'une fois. Ainsi, on peut grouper a avec bc, de ou fg; puis b avec df

et *eg*; enfin *c* avec *dg* et *ef*; on forme ainsi les *sept triades fondamentales*

abc, *ade*, *afg*, *bdf*, *beg*, *cdg*, *cef*.

Parmi ces sept triades, il y en a quatre qui ne contiennent pas la la lettre *a*, que nous placerons dans la colonne du dimanche; de même, il en existe quatre qui ne contiennent pas la lettre *b*; nous les placerons dans la colonne du lundi; et ainsi de suite. Nous formerons le canevas suivant :

DIMANCHE.	LUNDI.	MARDI.	MERCREDI.	JEUDI.	VENDREDI.	SAMEDI.
$p a_1 a_2$	$p b_1 b_2$	$p c_1 c_2$	$p d_1 d_2$	$p e_1 e_2$	$p f_1 f_2$	$p g_1 g_2$
bdf	*ade*	*ade*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*
beg	*afg*	*afg*	*afg*	*afg*	*ade*	*ade*
cdg	*cdg*	*bdf*	*beg*	*bdf*	*beg*	*bdf*
cef	*cef*	*beg*	*cef*	*cdg*	*cdg*	*cef*

Cela posé, nous remarquerons que chaque triade fondamentale telle que *bdf* donne quatre combinaisons des quatorze jeunes filles prises trois à trois, et par exemple :

$$b_1 d_1 f_1, \quad b_1 d_2 f_2, \quad b_2 d_1 f_2, \quad b_2 d_2 f_1,$$

qui peuvent entrer dans le tableau des promenades de la semaine. On pourrait écrire les indices 1 et 2 de plusieurs autres manières; mais nous avons choisi celle qui se présente le plus naturellement, et nous ferons de même dans ce qui suivra. Plaçons ces combinaisons dans les colonnes respectives qui contiennent *bdf*, c'est-à-dire dans les colonnes du dimanche, du mardi, du jeudi et

du samedi; puis, dans ces mêmes colonnes, donnons à l'autre lettre b, d ou f un indice différent de celui qui a été écrit, nous obtenons ainsi pour les quatre dernières lignes du tableau :

$b_1 d_1 f_1$	ade	$a\,d_1 e$	abc	$a\,b_1 c$	abc	$a\,b_1 c$
$b_2 e\,g$	afg	$a\,f_1 g$	afg	$a\,f_1 g$	ade	$a\,d_1 e$
$c\,d_2 g$	cdg	$b_1 d_2 f_2$	beg	$b_2 d_1 f_2$	beg	$b_2 d_2 f_1$
$c\,e\,f_2$	cef	$b_2 e\,g$	cef	$c\,d_2 g$	cdg	$c\,e\,f_2$

Prenons maintenant la triade fondamentale beg qui se trouve, après la première, dans la promenade du dimanche, et que l'on trouve dans trois autres colonnes, avec leurs indices respectifs

$$b_2eg,\quad b_2eg,\quad beg,\quad beg.$$

Nous écrivons les autres indices, dans l'ordre le plus simple, comme il suit

$$b_2e_1g_1,\quad b_2e_2g_2,\quad b_1e_1g_2,\quad b_1e_2g_1,$$

et nous placerons ces combinaisons dans les colonnes correspondantes; nous avons alors

$b_1 d_1 f_1$	ade	$a\,d_1 e_1$	$a\,b_2 c$	$a\,b_1 c$	$a\,b_2 c$	$a\,b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	afg	$a\,f_1 g_1$	$a\,f\,g_1$	$a\,f_1 g$	$a\,d\,e_1$	$a\,d_1 e$
$c\,d_2 g_2$	cdg	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c\,e_2 f_2$	cef	$b_2 e_2 g_2$	$c\,e_2 f$	$c\,d_2 g$	$c\,d\,g_2$	$c\,e\,f_2$

A la triade fondamendale cdg correspondent les quatre combinaisons

$$cd_2g_2,\quad cdg,\quad cd_2g,\quad cdg_2;$$

en complétant les indices, nous obtenons

$$c_1d_2g_2,\quad c_1d_1g_1,\quad c_2d_2g_1,\quad c_2d_1g_2;$$

plaçons ces combinaisons dans leurs colonnes respectives, et ajoutons les indices différents pour les lettres pareilles, nous avons

$b_1 d_1 f_1$	$a\ d_2 e$	$a\ d_1 e_1$	$a\ b_2 c$	$a\ b_1 c_1$	$a\ b_2 c_1$	$a\ b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a f\ g_2$	$a\ f_1 g_1$	$a\ f\ g_1$	$a\ f_1 g_2$	$a\ d_2 e_1$	$a\ d_1 e$
$c\ d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1\ d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2\ e\ f$	$b_2 e_2 g_2$	$c\ e_2 f$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c\ e\ f_2$

La colonne du dimanche est complète; en passant à la colonne suivante, nous trouvons la triade fondamentale *ade* qui se présente sous les formes :

$$ad_2e, \quad ad_1e_1, \quad ad_2e_1, \quad ad_1e;$$

en complétant les indices, nous aurons

$$a_1d_2e_2, \quad a_1d_1e_1, \quad a_2d_2e_1, \quad a_2d_1e_2.$$

Notre tableau devient

$b_1 d_1 f_1$	$a_1 d_2 e_2$	$a_1 d_1 e_1$	$a\ b_2 c$	$a\ b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a_2 f g_2$	$a_2 f_1 g_1$	$a\ f\ g_1$	$a\ f_1 g_2$	$a_2 d_2 e_1$	$a_2 d_1 e_2$
$c_1 d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2 e_1 f$	$b_2 e_2 g_2$	$c\ e_2 f$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c\ e_1 f_2$

Les triades de la forme *afg* sont

$$a_2fg_2, \quad a_2f_1g_1, \quad afg_1, \quad af_1g_2,$$

et se complètent par

$$a_2f_2g_2, \quad a_2f_1g_1, \quad a_1f_2g_1, \quad a_1f_1g_2;$$

ce qui donne

$b_1 d_1 f_1$	$a_1 d_2 e_2$	$a_1 d_1 e_1$	$a_2 b_2 c$	$a_2 b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a_2 f_2 g_2$	$a_2 f_1 g_1$	$a_1 f_2 g_1$	$a_1 f_1 g_2$	$a_2 d_2 e_1$	$a_2 d_1 e_2$
$c_1 d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2 e_1 f_1$	$b_2 e_2 g_2$	$c\ e_2 f_1$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c\ e_1 f_2$

Enfin la considération de la triade fondamentale *abc*, complétée ainsi

$$a_2 b_2 c_2,\quad a_2 b_1 c_1,\quad a_1 b_2 c_1,\quad a_1 b_1 c_2,$$

conduit au tableau définitif :

DIMANCHE.	LUNDI.	MARDI.	MERCREDI.	JEUDI.	VENDREDI.	SAMEDI.
$p\ a_1 a_2$	$p\ b_1 b_2$	$p\ c_1 c_2$	$p\ d_1 d_2$	$p\ e_1 e_2$	$p\ f_1 f_2$	$p\ g_1 g_2$
$b_1 d_1 f_1$	$a_1 d_2 e_2$	$a_1 d_1 e_1$	$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_1 c_2$
$b_2 e_1 g_1$	$a_2 f_2 g_2$	$a_2 f_1 g_1$	$a_1 f_2 g_1$	$a_1 f_1 g_2$	$a_2 d_2 e_1$	$a_2 d_1 e_2$
$c_1 d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2 e_1 f_1$	$b_2 e_2 g_2$	$c_1 e_2 f_1$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c_1 e_1 f_2$



LES TROIS PENSIONNATS.

Par un procédé analogue au précédent, M. Frost a montré que l'on pouvait étendre l'énoncé du problème des quinze demoiselles aux cas où le nombre des jeunes filles est égal à l'un des nombres

$$63,\ 255,\ 1023,\ \ldots.$$



et, en général, à toutes les puissances de 2, d'exposant pair, diminuées de l'unité. On trouvera la solution dans le mémoire cité; mais nous indiquerons préférablement ici un procédé qui permet d'étendre la solution du problème supposé résolu pour un certain nombre de jeune filles, à un nombre trois fois plus grand.

Ainsi nous avons résolu le problème pour 9 et pour 15 demoiselles; le procédé suivant, dû à M. Walecki, permet de résoudre le problème pour un nombre de jeunes filles égal à

$$27,\ 81,\ 243,\ \ldots,$$

ou à

$$45,\ 135,\ 405,\ \ldots.$$

Nous prendrons comme exemple le nombre de 45 demoiselles, et nous supposerons les jeunes filles réparties dans trois pensionnats ayant le même nombre d'élèves. Désignons-les par

1er Pensionnat. — $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1 f_1\ g_1\ h_1\ i_1 j_1\ k_1\ l_1\ m_1\ n_1\ o_1$;
2e Pensionnat. — $a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ e_2\ {}_2 f g_2\ h_2\ i_2 j_2\ k_2\ l_2\ m_2\ n_2\ o_2$;
3e Pensionnat. — $a_3\ b_3\ c_3\ d_3\ e_3 f_3\ g_3\ h_3\ i_3 j_3\ k_3\ l_3\ m_3\ n_3\ o_3$.

Nous observerons que chacune des jeunes filles ayant 44 compagnes, on doit réaliser vingt-deux promenades. On en obtient immédiatement sept *particulières* en organisant les promenades par pensionnat, ainsi qu'on l'a expliqué précédemment; il reste à obtenir quinze promenades *générales* composées de triades, dans lesquelles les jeunes filles appartiennent à des pensionnats différents.

Pour la première promenade générale, nous réunirons les jeunes filles trois par trois, suivant les colonnes verticales, en formant ainsi les triades

$$a_1 a_2 a_3,\quad b_1 b_2 b_3,\quad c_1 c_2 c_3,\quad \ldots,\quad o_1 o_2 o_3.$$



Pour obtenir la deuxième promenade générale, nous mettons à la suite du deuxième pensionnat l'élève du premier rang, et à la suite du troisième les *deux* élèves du commencement; nous avons

1er Pensionnat. — $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_1\ h_1\ i_1\ j_1\ k_1\ l_1\ m_1\ n_1\ o_1$;

2e Pensionnat. — $b_2\ c_2\ d_2\ e_2\ f_2\ g_2\ h_2\ i_2\ j_2\ k_2\ l_2\ m_2\ n_2\ o_2\ a_2$;

3e Pensionnat. — $c_3\ d_3\ e_3\ f_3\ g_3\ h_3\ i_3\ j_3\ k_3\ l_3\ m_3\ n_3\ o_3\ a_3\ b_3$.

Nous réunissons encore les jeunes filles par colonnes verticales, en formant les triades

$$a_1 b_2 c_3,\quad b_1 c_2 d_3,\quad c_1 d_2 e_3,\quad \ldots,\quad o_1 a_2 b_3.$$

On obtiendra la troisième promenade générale et les suivantes en répétant successivement la même tactique; après ces quinze promenades générales, on retrouve la première.

Il est facile de constater que ces diverses promenades satisfont aux deux conditions de l'énoncé, à savoir que chaque jeune fille doit se trouver une fois, et une seule fois, avec toutes ses compagnes. Cela résulte d'ailleurs d'un théorème d'Arithmétique démontré dans notre premier volume, à la fin de la quatrième récréation.

En général, si l'on sait résoudre le problème des jeunes filles groupées trois par trois, pour n jeunes filles, on saura le résoudre pour $3n$ jeunes filles. En effet, on voit d'abord que n doit être multiple de trois; le nombre des promenades étant $\frac{1}{2}(n-1)$, le nombre n est donc impair. Pour $3n$ jeunes filles on réalise d'abord $\frac{1}{2}(n-1)$ promenades particulières; puis, par le procédé qui précède, n promenades générales; par suite, au total, $n+\frac{1}{2}(n-1)$ ou $\frac{1}{2}(3n-1)$ qui est le nombre exigé par l'énoncé.

LES p PENSIONNATS.

D'une manière encore plus générale, on résoudra le problème suivant dans lequel p désigne un nombre premier et q un nombre entier quelconque.

Des jeunes filles en nombre p^q se promènent journellement p par p; on demande comment il faut arranger leurs promenades de telle sorte que chacune des jeunes filles se trouve successivement une seule fois en compagnie de toutes les autres.

En effet, supposons que l'on ait pu former le tableau des promenades p par p de n jeunes filles; d'abord n est un multiple de p; de plus, chaque demoiselle se trouve chaque jour avec $(p - 1)$ autres; par suite, le nombre total des promenades des n jeunes filles doit être $\frac{n-1}{p-1}$. Nous allons démontrer que le problème est possible pour np jeunes filles réunies p par p. En effet, le nombre des promenades doit être $\frac{np-1}{p-1}$; on obtiendra ce nombre :

1° Par $\frac{n-1}{p-1}$ promenades particulières des demoiselles supposées également réparties dans p pensionnats;

2° Par n promenades générales obtenues par un procédé analogue à celui que nous venons d'indiquer plus haut, et l'on a bien

$$\frac{n-1}{p-1} + n = \frac{np-1}{p-1}.$$

En supposant d'abord $n = p$, on arrive ainsi de proche en



proche au cas de p^q demoiselles. Nous ferons voir ultérieurement que ces problèmes se ramènent à la théorie des carrés diaboliques et, par suite, aux principes fondamentaux de la géométrie des tissus à fils rectilignes.



ENCORE LES NEUF MUSES.

On peut résoudre plus simplement le problème des neuf muses de la manière suivante : Désignons les neuf muses par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *k*; et considérons le tableau

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

Pour la première réunion, on groupera les lettres par lignes, ce qui donne les trois triades

I. *abc*, *def*, *ghk*.

Pour la deuxième réunion, on groupera les lettres par colonnes verticales, ce qui donne les triades

II. *adg*, *beh*, *cfk*.

Pour la troisième réunion, on groupera les lettres parallèlement à la diagonale *ak*, en supposant que l'on écrive une seconde fois le tableau (A) à la droite du premier; on a ainsi les triades

III. *aek*, *bfg*, *cdh*.

Enfin, pour la quatrième réunion, on groupera les lettres paral-

lèlement à la diagonale *cg*, en supposant encore que l'on double le tableau (A) on forme ainsi les triades

IV. *ceg*, *afh*, *bdk*.

Il est facile de voir que deux lettres quelconques ne se trouvent qu'une seule fois dans l'une des triades précédentes, puisque les lignes qui joignent deux quelconques des neuf lettres ont des inclinaisons différentes. En conséquence, le tableau (A) nous désignera, pour abréger, les quatre réunions des neuf muses.



PROBLÈME DE M. WALECKI.

Le tableau (A) ne renferme pas toutes les combinaisons des neuf lettres prises trois à trois; en effet, on sait, par une formule bien connue, que le nombre des combinaisons de neuf lettres trois à trois est 84. Il y a donc lieu de se demander si, avec les 72 autres combinaisons, il est possible de former des tableaux analogues au tableau (A); en d'autres termes, nous allons résoudre le problème suivant :

Disposer les quatre-vingt-quatre combinaisons de neuf lettres prises trois à trois en sept tableaux de douze triades, de telle sorte que l'on rencontre dans tous les tableaux chacune des neuf lettres une fois et une seule fois avec les huit autres.

Pour plus de commodité, nous écrirons le tableau des douze triades des neuf lettres sous la forme

I. $$\left| \begin{array}{ccc} P & a & b \\ c & d & Q \\ e & f & g \end{array} \right| .$$



On obtient un nouveau tableau de quatre réunions satisfaisant aux conditions de l'énoncé, en laissant fixes P et Q, et en permutant circulairement les sept lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, c'est-à-dire en remplaçant chacune d'elles par la suivante, et la dernière par la première; on a ainsi le nouveau tableau :

$$\text{II.} \qquad \begin{vmatrix} P & b & c \\ d & e & Q \\ f & g & a \end{vmatrix}.$$

De plus, on obtiendra cinq autres tableaux par de nouvelles permutations circulaires.

En effet, dans le tableau (1), nous pouvons considérer quatre sortes de triades :

1° Celles qui contiennent à la fois P et Q;

2° Celles qui contiennent P sans contenir Q;

3° Celles qui contiennent Q sans contenir P;

4° Celles qui ne contiennent ni P ni Q.

La combinaison contenant P et Q dans le premier tableau est PQ*f*; par permutations circulaires successives, on aura, pour le premier tableau et les suivants, les triades

PQ*f*, PQ*g*, PQ*a*, PQ*b*, PQ*c*, PQ*d*, PQ*e*,

et l'on voit que ces triades sont bien distinctes, puisqu'elles diffèrent par la dernière lettre.

Les combinaisons du premier tableau qui contiennent P sans contenir Q sont

P*ab*, P*ce*, P*dg*;

par permutations circulaires successives, la première d'entre elles donne les triades

III. P*ab*, P*bc*, P*cd*, P*de*, P*ef*, P*fg*, P*ga*.

Toutes ces combinaisons sont distinctes, puisque la deuxième lettre de chacune d'elles est différente, et que la troisième est celle qui suit immédiatement la deuxième dans l'ordre circulaire *abcdefga*. Nous dirons que ces combinaisons appartiennent au type P (0).

De même, par permutations circulaires successives, la deuxième combinaison P*ce* donne les triades

IV. P*ce*, P*df*, P*eg*, P*fa*, P*gb*, P*ac*, P*bd*.

Toutes ces combinaisons sont distinctes, puisque la deuxième lettre de chacune d'elles est distincte, et que la troisième se rencontre toujours deux rangs après la deuxième dans l'ordre circulaire déjà considéré ; nous dirons que ces combinaisons appartiennent au type P (1); d'ailleurs, elles diffèrent évidemment des triades de la suite III.

La combinaison P*dg* appartient au type P (2); elle donne par permutations circulaires successives sept combinaisons différentes entre elles, et distinctes des triades des séries III et IV.

On fera le même raisonnement pour les combinaisons contenant Q sans contenir P, c'est-à-dire

Q*de*, Q*ac*, Q*fb*,

et qui appartiennent respectivement aux types Q (0), Q (1), Q (2).

Enfin les combinaisons qui ne contiennent ni P ni Q sont

efg, *gac*, *deb*, *bcf*, *fad*;

dans la première, il n'y a pas d'intervalle de *e* à *f*, ni de *f* à *g* dans l'ordre circulaire, mais de *g* à *e* il se trouve quatre lettres intermédiaires ; nous dirons que cette combinaison appartient au type 004; en opérant de même pour les suivantes, on trouve que



les cinq triades qui ne contiennent ni P ni Q appartiennent aux types

004, 013, 031, 022, 112;

ces types sont distincts, et, par suite, les permutations circulaires successives de ces triades donneront trente-cinq combinaisons nécessairement différentes entre elles, et distinctes des précédentes.

Ainsi, en résumé, nous avons groupé en sept tableaux de quatre réunions, c'est-à-dire de douze combinaisons, les quatre-vingt-quatre combinaisons trois à trois de neuf lettres. Dans les combinaisons de chaque réunion, on ne trouve qu'une seule fois les combinaisons des lettres prises deux à deux, et les combinaisons trois à trois sont différentes dans l'ensemble des tableaux.



SOLUTIONS DE PEIRCE.

Nous avons reçu, pendant l'impression, un mémoire très intéressant sur le problème des jeunes filles [1]. Cet article nous a été adressé, de Washington, par le fils de l'auteur, M. C.-S. Peirce, bien connu pour ses curieuses publications sur l'*Algèbre de la Logique*. Nous nous bornerons, pour l'instant, à reprendre le problème des quinze jeunes filles et à exposer une solution bien différente de celle que nous avons indiquée ci-dessous. Ajoutons cependant que la solution moins simple de M. Frost conduit à une généralisation qu'on ne retrouve pas ici.

[1] *Cyclic solutions of the school-girl puzzle*, by BENJAMIN PEIRCE, professor of Astronomy and Mathematics in Harvard University. (*The Astronomica Journal*, de Gould, vol. VI, p. 169-174. — Cambridge, Massachussets, 7 décembre 1860).

Désignons par p l'une des jeunes filles; divisons les quatorze autres en deux groupes de sept, et représentons les par

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7;$$

cela posé, considérons l'un quelconque des trois tableaux

$p\ a_1\ b_1$	$p\ a_1\ b_1$	$p\ a_1\ b_1$
$a_2\ a_4\ b_3$	$a_2\ a_4\ b_5$	$a_2\ a_7\ b_6$
$a_3\ a_7\ b_5$	$a_3\ a_7\ b_2$	$a_3\ a_6\ b_4$
$a_5\ a_6\ b_2$	$a_5\ a_6\ b_3$	$a_4\ a_5\ b_7$
$b_4\ b_6\ b_7$	$b_4\ b_6\ b_7$	$b_2\ b_3\ b_5$

Chacun d'eux renferme les quinze jeunes filles groupées trois par trois; de plus, dans un même tableau, la différence des indices de deux lettres semblables n'est jamais répétée deux fois; il en est de même de la différence entre les indices d'une lettre a et d'une lettre b; par conséquent, si l'on prend pour promenade du dimanche celle qui correspond au premier tableau, par exemple, on obtiendra celle du lundi en augmentant d'une unité les indices de a et de b, celle du mardi en augmentant de deux unités les indices de a et de b, et ainsi de suite, en ayant soin de supprimer dans ces indices les multiples de 7.





SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU D'HAMILTON.

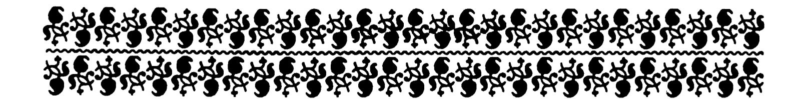
A Monsieur Paul Bert, membre de l'Institut, professeur de physiologie à la Sorbonne.

« On dirait que la nature a fait comme ces vierges qui conservent longtemps ce qu'elles ont de plus précieux et se laissent ravir en un moment ce même trésor qu'elles ont conservé avec tant de soin et défendu avec tant de constance. »

(MONTESQUIEU. — *Discours à l'Académie des Sciences de Bordeaux*, 5 novembre 1717.)







SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU D'HAMILTON.

Le jeu qui fait l'objet de cette récréation a été imaginé par l'illustre Hamilton, l'inventeur de la méthode des Quaternions, pour servir d'exemple à divers calculs de cette théorie. On trouve à Londres deux formes différentes de ce jeu sous les titres : « *The Travellers Dodecahedron, or a voyage round the world, and the Icosian Game, invented by Sir William Rowan Hamilton, Royal Astronomer of Ireland ; forming a new and highly amusing game for the drawing room, particularly interesting to students in mathematics of illustrating the principles of the Icosian Calculus.* » Published by John Jaques and son, Hatton Garden; London, 1859.

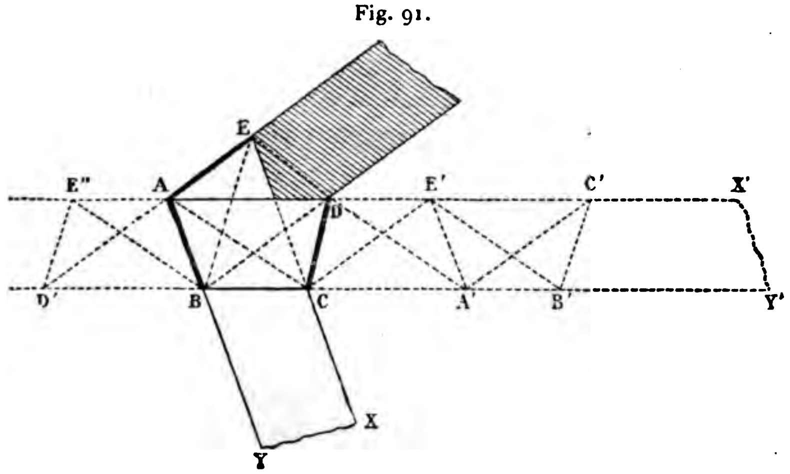
Mais, avant d'expliquer les règles et la théorie du jeu, il est indispensable d'entrer dans quelques détails sur le pentagone et sur le dodécaèdre réguliers. Nous avons profité de l'occasion pour montrer au lecteur les formes des polyèdres réguliers étoilés, qui se déduisent tous du dodécaèdre régulier convexe.



LE NŒUD DE CRAVATE.

On trouve dans tous les Traités de Géométrie la construction du pentagone régulier à l'aide de la règle et du compas. On sait encore que Mascheroni a donné le moyen de construire le pentagone à l'aide du compas seul. Enfin, on peut obtenir le pentagone régulier en faisant le nœud de sa cravate, de la manière suivante. Avec la cravate, un ruban ou une bandelette de papier à bords parallèles, on fait un nœud simple et serré, sans froisser l'étoffe ou le papier, ainsi que nous l'avons représenté dans la *fig.* 91;

Fig. 91.



les traits fins désignent les bords du papier; les traits plus forts sont les plis; les parties blanches comprises dans le périmètre formé par les traits pleins appartiennent à l'endroit, et la partie ombrée appartient à l'envers. Il s'agit de démontrer que la figure ABCDE représente un pentagone régulier, lorsque l'on suppose le papier sans épaisseur.

En développant la bande de papier sur le prolongement du trapèze ABCD, on trouve trois autres trapèzes

$$D'E''AB, \quad CDE'A', \quad E'A'B'C',$$

dans lesquels les lettres pareilles viennent coïncider lorsque l'on reforme le nœud; de telle sorte que

A et A′ sont symétriques par rapport à la droite CD,
D et D′ . . . . AB,
C et C′ . . . . A′E′.

De l'égalité des angles $A'E'D$ et $AE''D'$, il résulte que AB est parallèle à $A'E'$; par suite $A'E' = D'E''$ et l'on a

$$(1) \qquad AE = AE'' = A'E' = DE = DE' = D'E'';$$

de l'égalité des angles ABC et $A'B'C'$, il résulte $AB = B'C'$, et aussi

$$(2) \qquad AB = A'B' = BC = B'C';$$

enfin, de l'égalité des angles BAE'' et $B'A'E'$, il résulte $AB = AE$. Donc les dix longueurs contenues dans les égalités (1) et (2) sont égales entre elles ; mais, dans le parallélogramme $ABA'E'$, on a $BC = DE'$; donc $AD = CA'$, et le parallélogramme $ACA'D$ est un losange.

On en déduit l'égalité des quatre trapèzes; par conséquent la figure ne contient que deux sortes de lignes de longueurs différentes; par suite les triangles ABC, BCD CDE sont égaux, et la figure ABCDE est un pentagone régulier, puisque tous ses angles sont égaux entre eux, ainsi que les côtés.

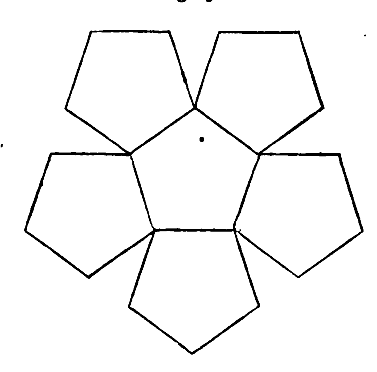


LE DODÉCAÈDRE CONVEXE.

On trace sur une feuille de carton un pentagone régulier ; puis on construit sur chacun des côtés un pentagone extérieur égal au premier, et l'on découpe le contour de la figure.

Si l'on replie la figure ainsi tracée autour des côtés du premier

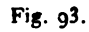
Fig. 92.

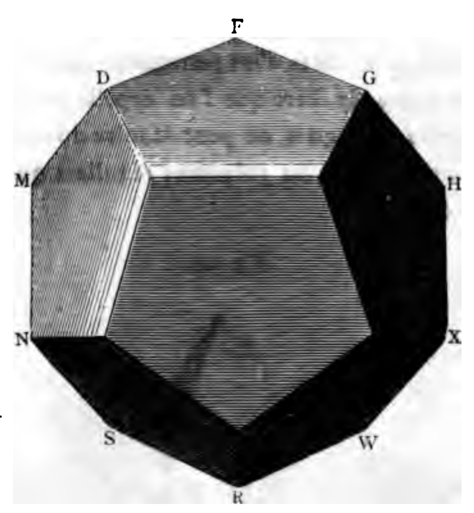


pentagone, et si l'on réunit, par une bandelette de papier, les arêtes issues d'un même sommet, pour les pentagones extérieurs, on forme ainsi une sorte de corbeille (*fig.* 92). On construit une seconde corbeille égale à la première ; ces deux corbeilles peuvent s'emboîter l'une dans l'autre, le long des arêtes extérieures, et l'on forme un polyèdre régulier que l'on nomme ***dodécaèdre régulier convexe*** [1] (*fig.* 93). Il est limité par douze pentagones réguliers ; il a vingt sommets et trente arêtes.

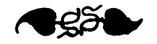
[1] Cette figure et les autres figures ombrées de cette récréation sont extraites du ***Traité de Géométrie*** de MM. Rouché et de Comberousse. — Paris, Gauthier-Villars, 1883.

On peut encore obtenir le dodécaèdre régulier avec deux longues bandes de papier. Pour cela, on fait successivement, avec


Fig. 93.



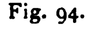
une bande, trois nœuds pentagonaux dans le même sens (*fig.* 98), puis trois nœuds pentagonaux dans le sens inverse; on fait une seconde bande égale à la première; il ne reste plus qu'à réunir ces deux bandes, après les avoir pliées le long des côtés communs des pentagones, en les engrenant l'une dans l'autre, comme les corbeilles dont nous venons de parler, ou mieux encore, comme les deux morceaux de la peau qui recouvre une balle élastique.

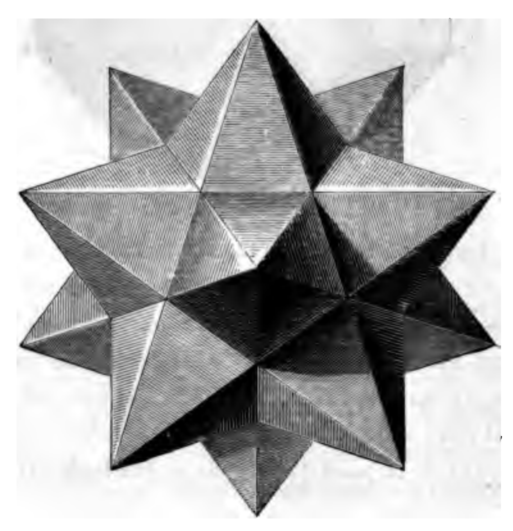




LES DODÉCAÈDRES ÉTOILÉS.

Si l'on prolonge les côtés d'un pentagone régulier, on obtient une nouvelle figure régulière que l'on appelle *pentagone étoilé*. Par des procédés analogues, on peut déduire du dodécaèdre ordinaire trois autres solides ou polyèdres réguliers que l'on appelle dodécaèdres étoilés.


Fig. 94.

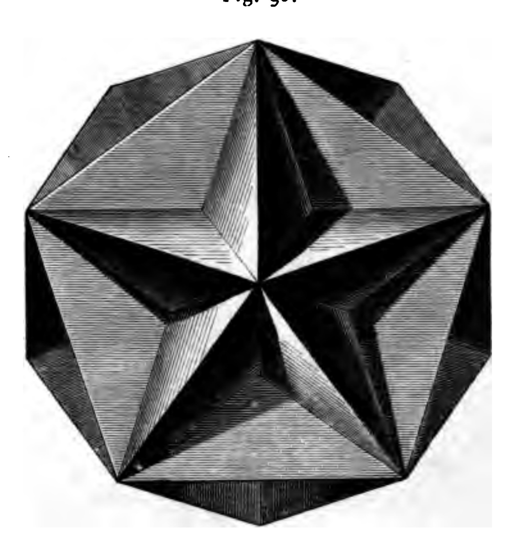


En prolongeant, dans le dodécaèdre ordinaire, les arêtes qui forment les côtés des douze pentagones, on obtient le ***dodécaèdre étoilé de troisième espèce, à faces étoilées*** (*fig.* 94).



Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq

Fig. 95.

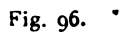


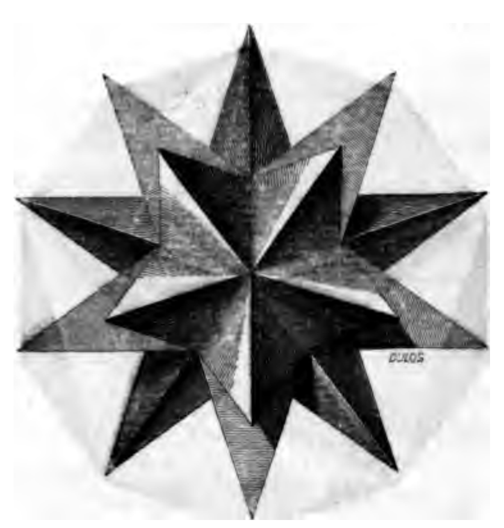
faces qui entourent la face opposée, on obtiendra le *dodécaèdre étoilé de troisième espèce, à faces convexes* (*fig.* 95).

Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans ce dodécaèdre de troisième espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtient le *dodécaèdre de septième espèce* (*fig.* 96).

Les polyèdres réguliers d'espèces supérieures ont été découverts par Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique*, T. IV); ils ont été rattachés aux polyèdres convexes par Cauchy (même Journal, T. IX); leur théorie a été considérablement simplifiée par M. J. Bertrand (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,*

T. XLVI). En ajoutant la sphère aux cinq polyèdres réguliers convexes, et aux quatre polyèdres étoilés (*voir plus loin*), on


Fig. 96.



remarque ainsi qu'il existe, dans l'espace à trois dimensions, *dix* corps réguliers.



LE VOYAGE AUTOUR DU MONDE.

Le jeu connu en Angleterre sous le nom de : *The Travellers Dodecahedron*, ou *A voyage round the world*, se compose essentiellement d'un dodécaèdre régulier, en bois, muni d'un manche fixé au centre de l'une des faces, et que l'on tient de la main

gauche. Les sommets du dodécaèdre sont garnis de clous à large tête, en ivoire ou en métal. Les vingt sommets du dodécaèdre, qui sont désignés par les vingt consonnes de l'alphabet, représentent par convention les initiales des villes suivantes :

B. Bruxelles,	H. Hambourg,	N. Naples,	T. Tobolsk,
C. Canton,	J. Jeddo,	P. Paris,	V. Vienne,
D. Delhi,	K. Kaschmir,	Q. Québec,	W. Washington,
F. Francfort,	L. Londres,	R. Rome,	X. Xérès,
G. Genève,	M. Moscou,	S. Stockholm,	Z. Zanzibar.

Les trente arêtes du dodécaèdre sont marquées par des traits noirs, et représentent les seules routes par lesquelles le voyageur peut passer pour aller d'une ville à l'autre.

On suppose que deux voyageurs partent en même temps de la même ville, voyagent de compagnie sur les routes tracées, pour visiter quatre autres villes voisines sur le parcours. Alors le premier voyageur revient sur ses pas pour s'arrêter au point de départ, tandis que l'autre doit continuer son chemin et ne rejoindre son camarade qu'après avoir visité toutes les autres villes, mais une seule fois. Supposons, par exemple, que les deux voyageurs partent de Bruxelles, en passant successivement par Canton, Delhi, Francfort et Genève. Le premier revient à Bruxelles et le second doit passer successivement une seule fois par les quinze autres villes et revenir à Bruxelles.

Si l'on écrit, sur un dodécaèdre en carton ou en bois, les vingt consonnes dans l'ordre représenté dans les diverses figures, on voit que l'on obtient immédiatement une première solution en suivant l'ordre alphabétique.

Pour réaliser cette promenade dodécaédrique, et pour se rappeler les diverses villes traversées, l'un des joueurs prend une ficelle qu'il fixe par l'une de ses extrémités à l'aide d'une boucle

sur l'un des sommets, et la guide successivement le long des arêtes en tournant autour des sommets. D'après la règle du jeu, on ne peut donc entourer deux fois l'un des clous placés aux sommets, et l'on doit revenir au départ. Ce premier problème, que nous appellerons le problème des *routes cycliques*, est toujours possible, et comporte, comme nous le ferons voir, deux ou quatre solutions, d'après les positions respectives des cinq villes initiales.

Ainsi, en donnant comme initiales les cinq villes BCDFG, on a, en dehors de la solution alphabétique, une seconde solution

BCDFGHXWRSTVJKLMNPQZ.



LE JEU ICOSIEN.

Le jeu nommé *The Icosian Game* se compose d'une planchette en bois sur laquelle on a dessiné la *fig.* 97. Les sommets sont percés de trous, dans lesquels il s'agit de placer vingt pions numérotés, en porcelaine ou en ivoire. Les pions sont numérotés de 1 à 20 et doivent être placés dans l'ordre numérique, d'après les diverses conditions exigées par l'un des deux joueurs.

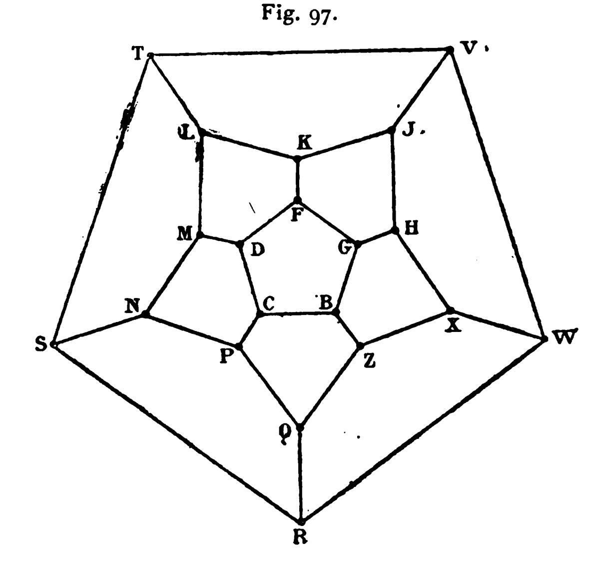
Ce jeu ne diffère du précédent que par la forme extérieure; en effet, si l'on suppose l'œil d'un observateur placé en dehors d'un dodécaèdre à une petite distance du centre de la face opposée à BCDFG, la perspective des sommets et des arêtes du dodécaèdre sur le plan de la face BCDFG donne précisément la figure du jeu icosien. Il résulte évidemment de cette remarque que l'on peut varier la forme du réseau des lignes de l'icosien, en faisant la

perspective du dodécaèdre d'un point quelconque sur un plan quelconque, pourvu que deux sommets ne coïncident pas dans cette perspective.

En rétablissant, par la pensée, la figure du dodécaèdre dans l'espace, on retrouvera la symétrie qui disparaît dans les différentes perspectives.

Pour familiariser le lecteur avec la pratique de l'icosien, nous

Fig. 97.



donnerons encore les exemples suivants :

Exemple I. — On donne les cinq villes initiales BCPNM; tracer une route cyclique.

Ce problème ne comporte que les deux solutions

BCPNMDF { KLTSRQZXWVJHG,
GHXWVJKLTSRQZ,

EXEMPLE II. — On donne les cinq villes initiales LTSRQ; tracer une route cyclique.

Ce problème comporte quatre solutions

$$\text{LTSRQ}\begin{cases}\text{ZXWVJHGBCPNMDFK,}\\ \text{ZBCPNMDFGHXWVJK,}\\ \text{ZBGHXWVJKFDCPNM,}\\ \text{PNMDCBZXWVJHGFK.}\end{cases}$$

EXEMPLE III. — On donne les cinq villes initiales JVTSR; tracer une route cyclique.

Ce problème n'a que les deux solutions

$$\text{JVTSRWX}\begin{cases}\text{ZQPNMLKFDCBGH,}\\ \text{HGFDCBZQPNMLK.}\end{cases}$$



THÉORIE DE M. HERMARY.

Parmi les diverses théories de ce jeu, nous exposerons celle qui nous a été communiquée par M. Hermary, chef d'escadron d'artillerie. Cette méthode nous paraît encore plus ingénieuse que la théorie du solitaire donnée par le même auteur (*voir* le Tome I.).

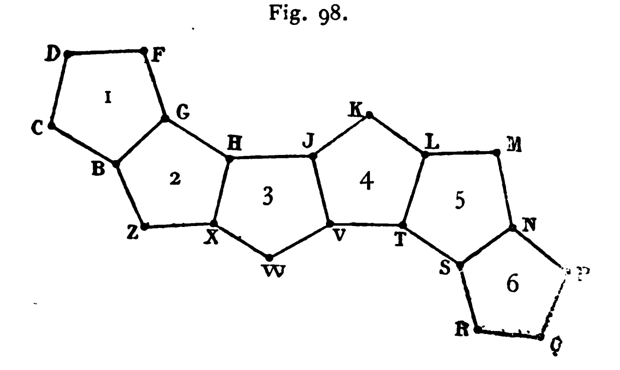
Lorsqu'un mobile parcourt les arêtes d'un dodécaèdre de manière à revenir à son point de départ sans passer plus d'une fois par le même sommet, sa trajectoire divise la surface en deux segments. On peut supposer que cette surface soit réalisée matériellement, en carton mince, par exemple, et qu'elle se trouve découpée suivant la trajectoire; on obtiendra ainsi *deux segments séparables*.

Posons la condition que le mobile devra visiter tous les sommets et cherchons quelle en sera la conséquence pour la nature des

segments. Un pentagone quelconque de l'un des segments ne pourra toucher ses voisins que par des côtés *non consécutifs;* car, si deux côtés de contact se trouvaient consécutifs, le sommet où ils se réunissent ne pourrait être visité par le mobile. Donc chaque pentagone touche ses voisins par deux côtés au plus, c'est-à-dire que ces pentagones se succèdent comme les anneaux d'une chaîne. Par suite, les deux segments sont susceptibles d'être rabattus dans un plan quelconque par des rotations successives autour des côtés de contact.

Les *fig.* 98 et 99 représentent le développement des deux

Fig. 98.

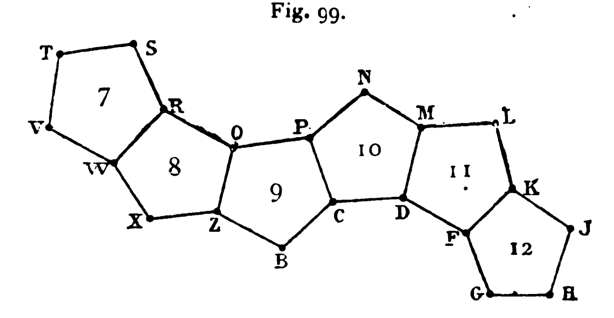


segments que l'on trouve dans la première solution que nous avons donnée plus haut, en suivant l'ordre alphabétique. Ces deux segments sont assujettis à pouvoir *s'emboîter* de manière à reproduire la surface du dodécaèdre; les lettres de même nom indiquent les sommets qui doivent coïncider. Quelle que soit la route cyclique, les périmètres des deux segments présentent donc le même nombre de côtés, et puisque l'adjonction d'un pentagone à l'un des segments, quelle que soit sa forme, augmente le nombre

des sommets de trois unités, le nombre des pentagones est le même dans les deux segments. Ainsi donc chacun des deux segments d'une route cyclique est nécessairement formé de six pentagones.

Dans la *fig.* 98, les lettres C, D, F désignent des *sommets simples ;* B, G, H des sommets *doubles ;* cette dénomination n'a pas besoin de commentaire. Les sommets doubles de l'un des segments correspondent aux sommets simples de l'autre, et réciproquement, puisqu'après l'emboîtement tous les sommets doivent être *triples.* Or, dans chaque segment, il y a nécessairement deux

Fig. 99.



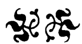
pentagones extrêmes ayant chacun trois sommets simples consécutifs ; donc il doit se présenter aussi deux fois trois sommets doubles et consécutifs. Par un procédé analogue, on démontre que chacun des segments ne peut avoir deux ou quatre sommets simples consécutifs.

En examinant toutes les dispositions que l'on peut donner à une chaîne de six pentagones consécutifs, en tenant compte des conditions que nous venons d'indiquer, l'on se convaincra facilement qu'on ne peut trouver d'autres segments que celui des *fig.* 98 et 99, ou la disposition symétrique. Or cette dernière étant tracée sur un papier transparent devient identique à la première

lorsque le lecteur retourne la feuille pour l'examiner à l'envers. Donc, si l'on convient que la figure peut être envisagée par l'une ou l'autre des faces [1], on pourra formuler la proposition suivante.

THÉORÈME. — *La trajectoire d'un mobile qui a visité tous les sommets du dodécaèdre et qui est revenu à son point de départ, sans avoir passé plus d'une fois par le même sommet, peut toujours être représentée par le périmètre d'un assemblage de six pentagones disposés comme ceux de la fig.* 98.

Il est évident que ce théorème permet toujours de trouver les solutions du premier problème d'Hamilton. En effet, il suffit de rechercher de combien de manières le début donné peut être identifié avec une certaine partie de la trajectoire qui a été définie ci-dessus. Cette méthode résout donc la question; nous invitons le lecteur à l'appliquer aux exemples déjà donnés; c'est le meilleur moyen de se rendre maître du jeu. Cependant nous devons faire observer qu'elle n'est pas commode pour déterminer le nombre des solutions qui conviennent dans chaque cas. Nous donnerons donc une règle pratique fort ingénieuse imaginée encore par M. Hermary.



RÈGLE PRATIQUE.

Le mobile qui décrit une route cyclique, ayant parcouru deux côtés consécutifs tels que FG et GH, peut continuer sa route suivant HJ ou suivant HX. Dans le premier cas, il reste sur le pen-

(1) Cette convention est parfaitement justifiée, car on peut choisir *ad libitum* la face sur laquelle on a rabattu les pentagones de chaque segment; d'ailleurs on peut aussi bien supposer l'observateur à l'intérieur ou à l'extérieur du dodécaèdre. Quant à la trajectoire dont il est ici question, on doit la considérer comme l'analogue d'un grand cercle de la sphère.

tagone dont faisaient partie les deux premiers côtés; nous dirons alors qu'il y a *permanence;* dans le second cas, le mobile passe sur un autre pentagone, et nous dirons qu'il y a *variation*. Dans ce qui suit, nous désignerons ces deux genres différents de déplacement par les lettres initiales *p* et *v*.

Reprenons la route cyclique de la *fig*. 97. Ayant décrit BCD, le déplacement sur DF sera désigné par *p*, ainsi que le déplacement sur FG; mais le déplacement sur GH sera noté par *v*. Cela posé, en plaçant, entre chaque lettre et au-dessous de la notation de la route cyclique, l'une des deux lettres *p* ou *v* qui convient, on a

B C D F G H J K L M N P Q R S T V W X Z B C D
. . *p p v p p v v v v v p p v p p v v v v v*.

On observera que nous n'avons pu noter le genre du déplacement sur BCD qu'à la fin de la route. La seconde ligne du tableau précédent se compose de deux parties égales composées de dix termes. La période de dix termes est écrite ci-dessous avec un Numéro d'ordre correspondant, pour chaque déplacement

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
p.	*p*.	*v*.	*p*.	*p*.	*v*.	*v*.	*v*.	*v*.	*v*;

c'est-à-dire *deux permanences*, *une variation*, *deux permanences*, *cinq variations*. Si l'on écrit la double série de ces lettres sur une circonférence, la période se reproduit lorsqu'on la renverse, mais en commençant à un endroit différent; il suffit donc de considérer cette série dans un seul sens [1].

Lorsque l'on donne les cinq villes initiales, les deux derniers

[1] On voit immédiatement l'explication de ce fait, si l'on observe que les lettres inscrites le long des périmètres des deux segments se succèdent en sens inverses et avec des points de départ différents.

côtés donnent deux déplacements qui peuvent être notés d'après les conventions précédentes. Par suite, pour trouver les solutions qui correspondent à chaque cas particulier, il suffit de chercher en quels points de la période se présentent deux déplacements consécutifs pouvant être identifiés avec ceux du problème. Pour donner un exemple, reprenons la première solution; les deux premiers déplacements sur DF et FG sont notés par la suite *pp*; or, dans la période cyclique précédente, on ne trouve que deux fois la suite *pp*; donc le problème comporte deux solutions.

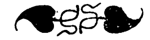
Lorsque l'on donne cinq villes initiales, on ne peut rencontrer que quatre cas, qui sont les suivants :

pp, *pv*, *vp*, *vv*;

en appliquant la méthode précédente, on trouvera facilement les nombres de solutions que nous résumons dans le tableau suivant, avec les numéros de la période qui correspondent au troisième côté de la route.

Nombre des routes cycliques commençant par cinq sommets.

Cas.	Notation.	Nombre.	Numéros.
I	*pp*	2	1 ou 4,
II	*pv*	2	2 ou 5,
III	*vp*	2	3 ou 10,
IV	*vv*	4	6, 7, 8, 9.



NOMBRE DES SOLUTIONS.

Au lieu de se donner cinq villes initiales, on peut en prendre un nombre différent. La méthode de M. Hermary permet de ré-



soudre le problème dans tous les cas et de déterminer le nombre des solutions. On trouve ainsi que l'on peut tracer trente routes cycliques différentes sur le dodécaèdre : c'est le nombre des solutions du problème d'Hamilton quand on suppose que l'on se donne un sommet; on trouve ensuite vingt routes pour deux sommets et ainsi de suite. Ces résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Nombre des sommets.	Nombre des solutions.
1	30,
2	20,
3	10,
4	6 ou 4,
5	4 ou 2,
6	3, 2, 1 ou 0,
7	2, 1 ou 0,
8 ou plus	1 ou 0.

A partir de huit sommets, il n'y a jamais plus d'une solution, et les cas d'impossibilité deviennent de plus en plus nombreux au fur et à mesure que le nombre des sommets augmente.

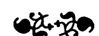
On voit, par ce qui précède, que, dans cette question et dans d'autres du même genre, le nombre des conditions à fixer pour les données d'un problème sont loin d'être déterminées comme dans les problèmes de Géométrie.

Le nombre de cinq sommets a été choisi d'une manière rationnelle, parce que c'est celui qui donne le plus petit nombre de solutions sans qu'il y ait cependant aucun cas d'impossibilité.

Remarque i. — Lorsque l'on a tracé une route cyclique, les dix autres arêtes non parcourues du dodécaèdre forment un système complémentaire d'une route cyclique. Il possède cette propriété que ces dix lignes n'ont aucun sommet commun. On peut donc remplacer la définition du jeu de l'icosien par celle-ci :

On trace sur la surface du dodécaèdre une, deux, trois, quatre,... arêtes consécutives; cela posé, trouver, dans l'ensemble des autres arêtes, un système de dix arêtes n'ayant aucun point commun. A toute solution de l'icosien correspond une solution et une seule dans ce nouveau jeu; ainsi il existe trente systèmes différents de dix arêtes isolées; puis, si l'on choisit une arête (qui correspond à deux sommets), il y a vingt systèmes de dix arêtes isolées parmi vingt-neuf arêtes données du dodécaèdre; il y a dix systèmes de dix arêtes isolées, parmi le système des arêtes du dodécaèdre diminué de deux arêtes consécutives et données; etc.

Remarque II. — On peut aussi remplacer l'icosien par une partie déterminée d'un jeu de dominos du double-as au double-vingt; en effet, si l'on remplace les consonnes B, C, D,..., Z, par les nombres 1, 2, 3,..., 20, à toute arête telle que BC correspond un domino, tel que 1-2; et ainsi aux trois arêtes BC, BG, BZ correspondent les dominos 1-2, 1-5 et 1-20. On remplace ainsi les arêtes par trente dés de ce jeu de dominos, et il s'agit de former, avec vingt d'entre eux, une disposition, d'après la règle du jeu, de telle sorte qu'un point soit répété deux fois, et pas davantage. Les autres problèmes d'Hamilton que nous allons considérer conduisent encore à des problèmes analogues sur ce jeu de dominos.



LES ROUTES FERMÉES.

On peut se proposer, sur le jeu d'Hamilton, un certain nombre d'autres problèmes dont il reste à perfectionner la théorie. M. Hermary pense que sa méthode pourrait s'appliquer au problème des routes fermées, mais elle exigerait quelques tâtonnements.

PROBLÈME. — ***On donne trois villes initiales, placer tous les autres pions suivant une route nécessairement différente d'une route cyclique, pour s'arrêter à une ville donnée.***

On suppose encore qu'il n'est permis de passer qu'une seule fois par toutes les villes. Ce ***deuxième problème*** d'Hamilton comporte 0, 1, 2 ou 4 solutions, suivant les cas.

EXEMPLE I. — On donne les trois villes initiales BCD ; terminer le trajet en T.

Il n'y a qu'une solution

BCDFGHXZQPNMLKJVWRST.

EXEMPLE II. — Mêmes initiales; finir en W.

Il n'y a que deux solutions.

BCD { FGHXZQPNMLKJVTSRW,
BCD { MLTVJKFGHXZQPNSRW.

EXEMPLE III. — Mêmes initiales; finir en J.

Il n'y a que deux solutions.

BCD { MLTVWRSNPQZXHGFKJ,
BCD { MNPQZXHGFKLTSRWVJ.

On trouve ce même nombre de deux solutions pour les mêmes initiales, lorsqu'on finit en K, L, N ou V.

BCD { FGHJVTSRWXZQPNMLK,
BCD { FGHXZQPNMLTSRWVJK.

BCD { MNPQZXHGFKJVWRSTL,
BCD { MNPQZXWRSTVJHGFKL.

BCD { MLKFGHJVTSRWXZPQN,
BCD { MLTSRWVJKFGHXZQPN.

BCD { FGHJKLMNPQZXWRSTV,
BCD { MNPQZXWRSTLKFGHJV.



Exemple IV. — Mêmes initiales; finir en R.

Il y a quatre solutions.

BCD { FGHJKLMNPQZXWVTSR,
MLKFGHJVTSNPQZXWR,
MLTSNPQZXHGFKJVWR,
MNPQZXWVJHGFKLTSR.

Exemple V. — Mêmes initiales; finir en M.

Le problème est impossible; il l'est encore en prenant pour la fin du trajet l'une des villes F, H, P, Q, S, X.

On peut toujours supposer que les trois premières villes initiales sont B C D, sur le dodécaèdre, à cause de la symétrie. Nous avons donné les solutions pour quinze villes finales, en exceptant les villes M et F qui donnent des routes cycliques; le problème est donc résolu. En se donnant M ou F, pour la fin du trajet, on retrouverait le premier problème d'Hamilton avec quatre villes initiales, et l'on aurait alors quatre ou six solutions.



LES IMPASSES.

Dans le *troisième problème* d'Hamilton, on donne plusieurs villes initiales consécutives; il s'agit de placer un certain nombre de pions, donné d'avance, de manière qu'il soit impossible, d'après la règle ordinaire du jeu, d'en placer un de plus. Voici quelques exercices.

Exemple I. — On pose les pions 1, 2, 3, 4, sur les villes BCDM; on doit se trouver arrêté après avoir posé le dixième pion.

Une solution. — BCDMLKJHGF.

Exemple II. — On pose les pions 1, 2, 3, 4, sur les villes XWVT; on doit se trouver arrêté après avoir posé le dixième pion.

Une solution. — XWVTLKFGHJ.

Exemple III. — On pose les pions 1, 2, 3, 4, 5, sur les villes SNPQR; tracer une route cyclique avec les seize premiers pions.

Une solution. — SNPQRWVJHGBCDMLT.

Dans le *quatrième problème* d'Hamilton, on suppose qu'il est défendu de passer par une certaine ville, que l'on bouche avec le pion portant le nº 20. Il faut alors couvrir le reste du casier, d'après certaines conditions analogues aux précédentes.

Exemple IV. — On donne les trois villes initiales BCD sur lesquelles on place les pions 1, 2, 3; on interdit le passage dans la ville P que l'on couvre du nº 20; il s'agit de couvrir le reste de l'icosien d'après la règle ordinaire, en terminant au sommet F.

Il y a deux solutions

BCD { MNSTLKJVWRQZXHGF,
BCD { MNSRQZXWVTLKJHGF.

Exemple V. — On donne les mêmes initiales; on place le nº 20 sur la ville L; placer tous les autres pions d'après la règle ordinaire en finissant sur une ville non-adjacente à L.

Le problème comporte deux solutions

BCD { MNPQZXWRSTVJKFGH,
BCD { MNPQZXHGFKJVTSRW.



TRANSFORMATIONS DE L'ICOSIEN.

On peut remplacer le dodécaèdre par d'autres polyèdres réguliers; mais, si l'on conserve les règles de l'Icosien, il faut, pour appliquer la théorie, que le nombre des arêtes qui aboutissent

aux sommets soit égal à trois. Cette condition est remplie dans le tétraèdre (*fig.* 100) et dans le cube (*fig.* 101).

Fig. 100.

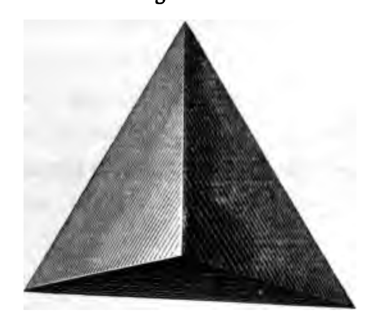
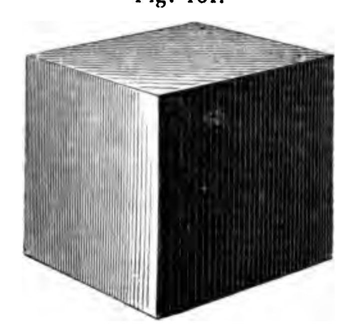
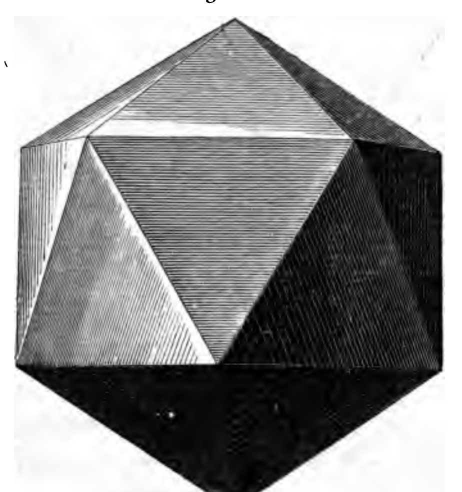


Fig. 101.



Mais alors le jeu devient très simple, soit qu'on l'exécute sur

Fig. 102.

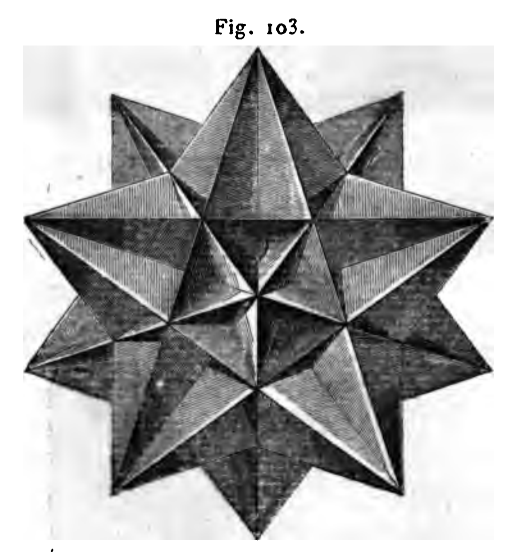


des solides en carton, soit sur leurs perspectives; cependant on

peut projeter le cube de telle sorte que le problème présente une certaine difficulté.

Hamilton a indiqué lui-même une transformation de l'Icosien. Si l'on joint les centres de toutes les faces du dodécaèdre aux centres des cinq faces adjacentes, on détermine les arêtes d'un autre polyèdre régulier, qu'on appelle *icosaèdre* (*fig.* 102); sa surface se compose de vingt triangles équilatéraux réunis cinq par cinq aux douze sommets; le nombre des arêtes est égal à trente,

Fig. 103.



comme dans le dodécaèdre. Ainsi le nombre des sommets ou des faces de l'icosaèdre est égal au nombre des faces ou des sommets du dodécaèdre, et le nombre des arêtes est le même. D'ailleurs, si l'on joint les centres de toutes les faces de l'icosaèdre aux centres des trois faces adjacentes, on détermine les arêtes d'un nouveau dodécaèdre, que l'on déduit ainsi de l'icosaèdre, comme on déduit l'icosaèdre du dodécaèdre (*voir* la note IV).

On obtient l'icosaèdre étoilé, que l'on appelle *icosaèdre de septième espèce* (*fig.* 103), en prolongeant chaque face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère [1].



THE TRAVELLERS ICOSAHEDRON.

Le jeu que nous avons décrit précédemment sous le nom du voyage autour du monde ou *The Travellers Dodecahedron* se transforme facilement dans le suivant, en remplaçant les sommets du dodécaèdre par les faces de l'icosaèdre. Dans ce nouveau jeu, il s'agit de traverser successivement une seule fois chacune des vingt faces de l'icosaèdre, en franchissant par le milieu vingt des trente arêtes de ce polyèdre, tandis que, dans l'autre jeu, il s'agissait de traverser successivement une seule fois chacun des sommets, en suivant vingt des trente arêtes du dodécaèdre. On peut donc se proposer les mêmes problèmes; si l'on désigne par la lettre *b* la face de l'icosaèdre qui réunit les centres des trois pentagones qui contiennent le sommet B du dodécaèdre et si l'on fait la même convention pour les autres faces, toutes les solutions du jeu de l'icosaèdre se déduisent des solutions du jeu icosien, en remplaçant les grandes lettres par les petites.

Ces considérations rentrent dans une théorie générale des propriétés de l'étendue, connue sous le nom de *loi de la dualité de l'espace*, loi qui a été merveilleusement exposée dans les travaux de trois illustres géomètres français de ce siècle, Brianchon, Poncelet, Chasles.

(1) CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*. T. IX, p. 68.



LE SOLITAIRE ICOSIEN.

On peut transformer l'Icosien en un jeu analogue à celui du solitaire. On couvre de pions les vingt cases (*fig.* 97), et l'on enlève un pion ; il s'agit ensuite de prendre successivement tous les autres, en profitant de la case vide, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un seul. Ainsi, si l'on enlève le pion B, le pion Q ou X peut prendre le pion Z, et venir se placer en B, ce que nous indiquerons par la notation $\frac{Q}{B}$ ou $\frac{X}{B}$. Nous allons démontrer que la réussite est toujours possible, en prenant pour cases initiale et finale deux cases quelconques ; d'abord on peut toujours supposer, à cause de la symétrie du dodécaèdre, que B est la case initiale et que la case finale est l'une des douze

B, C, D, L, M, N, P, Q, R, S, T, Z.

On joue d'abord les treize premiers coups :

$$\frac{D}{B}, \frac{Q}{C}, \frac{S}{P}, \frac{V}{S}, \frac{C}{N}, \frac{S}{P}, \frac{W}{S}, \frac{X}{Q}, \frac{K}{D}, \frac{L}{N}, \frac{B}{F}, \frac{Q}{C}, \frac{J}{G};$$

il reste les six pions C, D, F, G, S, N. Dans le tableau suivant :

$\frac{S}{M}, \frac{D}{P}, \frac{G}{D}, \frac{M}{C}$	P C	B, D, N, Q.
$\frac{S}{M}, \frac{G}{K}, \frac{C}{F}, \frac{K}{D}$	D M	C, F, L, N.
$\frac{S}{M}, \frac{D}{B}, \frac{G}{D}, \frac{M}{C}$	B C	Z, P, G, D.
$\frac{S}{M}, \frac{D}{N}, \frac{G}{D}, \frac{C}{M}$	M N	P, S, D, L.
$\frac{D}{P}, \frac{G}{D}, \frac{P}{M}, \frac{D}{N}$	S N	R, M, T, P.

la première colonne contient les quatre coups qui suivent le treizième, la seconde colonne désigne l'arête qui joint les deux derniers pions, et la troisième l'une des quatre cases finales qui correspond au dernier coup.

On peut se proposer d'autres problèmes, en terminant par un certain nombre de pions appartenant à une figure donnée de forme et de position ; mais il peut alors se présenter des cas d'impossibilité.







NOTES.

NOTE I.

Sur le jeu de dominos.

Si l'on considère un heptagone dont les sommets sont désignés par les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, et si l'on trace toutes les diagonales, l'ensemble formé par les côtés et les diagonales de l'heptagone est la représentation graphique du jeu ordinaire de dominos, en supprimant les doubles. A toute disposition de dominos, d'après la règle du jeu, correspond un trait continu, et, par conséquent, tout problème du domino ordinaire revient à un problème sur le tracé de figures d'un seul trait. Le système formé par l'heptagone et ses diagonales ne présente que des points pairs, et peut être décrit d'un seul trait continu qui correspond à une disposition rectiligne du jeu de dominos. Le problème de Reiss revient donc à déterminer le nombre des manières distinctes de décrire d'un seul trait continu l'ensemble des côtés et des diagonales de l'heptagone.

De même, si l'on prend un certain nombre de dominos dans le jeu complet, on pourra savoir si, avec tous ces dominos, on peut former une disposition rectiligne; pour cela, on figurera les dominos sur l'heptagone; la disposition rectiligne existera, si la figure correspondante contient 2 points impairs, ou n'en contient aucun.

Plusieurs autres jeux se ramènent encore au jeu de dominos, ou inversement; nous l'avons montré pour l'icosien et nous le ferons voir ultérieurement pour le problème du saut du cavalier au jeu des échecs.



NOTE II.

Sur les nombres de Fermat et de Mersenne.

Nous avons vu que le nombre des dispositions du jeu de parquet, pour un carré formé de 64 carreaux, est égal au carré de la soixante-quatrième puissance de 2. En diminuant ce nombre 2^{64} de l'unité, on obtient le nombre de grains de blé qui recouvriraient l'échiquier, en supposant un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, et ainsi en doublant jusqu'à la soixante-quatrième case. Le nombre $2^{64}-1$ rentre dans les *nombres de Mersenne* que nous avons considérés dans la note IV du Tome I. Nous dirons, à ce propos, que M. Le Lasseur vient encore de trouver que les nombres

$$2^{97}-1,\quad 2^{211}-1,\quad 2^{151}-1,\quad 2^{223}-1,$$

sont respectivement divisibles par

$$11447,\quad 15193,\quad 18121,\quad 18287,$$

et de vérifier que les autres nombres 2^n-1 pour vingt-quatre valeurs de n premier jusqu'à 257, n'ont pas de diviseurs plus petits que 30 000. Ces nouveaux calculs nous confirment dans cette opinion que Fermat et Mersenne possédaient une puissante méthode de décomposition ignorée aujourd'hui, mais que nous pensons avoir reconstituée en grande partie.

Dans notre voyage à Rome, nous avons pu obtenir de la bienveillance et de la générosité de Son Excellence le prince B. Boncompagni, la communication de deux précieux volumes de manuscrits contenant plus de quarante lettres inédites de Fermat à Mersenne. Dans une lettre datée de Toulouse, le 7 avril 1643, on trouve le passage suivant : « Vous me demandez si le nombre

$$100\,895\,598\,169$$

est premier ou non, et une méthode pour découvrir, dans l'espace d'un jour, s'il est premier ou composé. A cette question, je réponds que ce nombre est composé et se fait du produit de ces deux :

$$898\,423 \quad \text{et} \quad 112\,303,$$

qui sont premiers. Je suis toujours, mon révérend Père, votre très humble et très affectionné serviteur, FERMAT ». Pour se rendre compte de l'efficacité de cette méthode, on observera d'abord qu'il n'existait pas alors de tables très étendues de nombres premiers, et que ces deux facteurs de six chiffres étaient en dehors des tables ; mais on observera encore qu'il n'existe pas de

méthode connue pour décomposer rapidement en facteurs premiers des nombres de douze chiffres. Si nous comparons avec les méthodes plus modernes, nous voyons Gauss, dans la sixième section des *Disquisitiones arithmeticæ*, proposant plusieurs méthodes pour distinguer les nombres premiers des nombres composés, et pour décomposer ceux-ci en leurs facteurs premiers; c'est, ajoute Gauss, l'un des problèmes les plus importants et les plus utiles de toute l'Arithmétique (n° 329). Il prend pour exemple le nombre

$$314\,159\,265$$

qui se ramène immédiatement, par la suppression des facteurs $3^2, 5, 7$ à un nombre de six chiffres que l'on trouve dans les tables de Burckhardt :

$$997\,331 = 127 \times 7853.$$

Les méthodes de Gauss seraient impuissantes à résoudre le problème proposé par Mersenne à Fermat.

Si l'on ne parvient pas à la décomposition des nombres de Mersenne par l'emploi des diverses méthodes connues actuellement, on vérifie que ces nombres sont premiers par l'application du théorème suivant analogue au théorème de Wilson. *Pour que le nombre* $p = 2^{4q+3} - 1$ *soit vremier, il faut et il suffit que la congruence*

$$\sqrt{-1} \equiv 2\cos\frac{\pi}{2^{4q+2}}, \quad (\text{mod.}\, p),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{-1} \equiv \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}, \; (\text{mod.}\, p),$$

soit vérifiée après la disparition successive des radicaux.

En d'autres termes, on forme la suite des nombres V_n

$$1, \; 3, \; 7, \; 47, \; 2207, \; \ldots$$

tels que chacun d'eux, à partir du troisième, soit égal au carré du précédent diminué de 2 unités; on supprime les multiples de p, et si le nombre de rang $4q+2$ est nul, le nombre p est premier. Nous avons indiqué un procédé de calcul qui repose sur l'emploi du système de numération binaire et qui conduit à la construction d'un mécanisme propre à la vérification des grands nombres premiers.

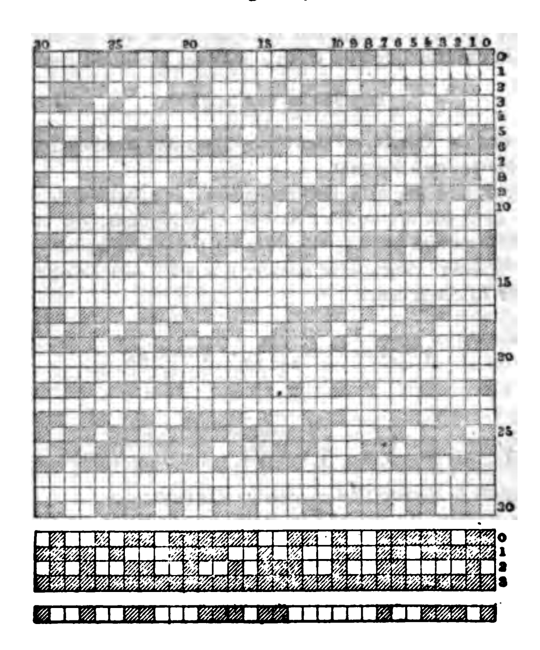
Dans ce système, la multiplication consiste simplement dans le déplacement longitudinal du multiplicande; d'autre part, il est clair que le reste de la division de 2^m par $2^n - 1$ est égal à 2^r, r désignant le reste de la

division de m par n ; par conséquent, dans l'essai de $2^{31} - 1$, par exemple, il suffira d'opérer sur des nombres ayant au plus 31 des chiffres 0 ou 1. La *fig.* 104 donne le calcul de V_{26} déduit du calcul de V_{25} par la formule

$$V_{26} \equiv V_{25}^2 - 2, \quad (\text{mod. } 2^{31} - 1);$$

les carrés ombrés représentent les unités des différents ordres du système

Fig. 104.



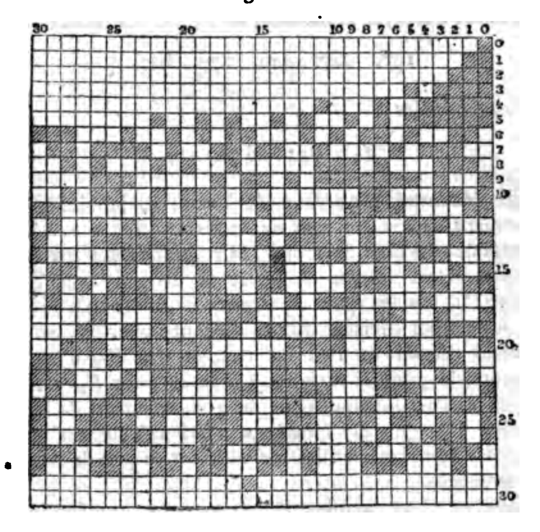
binaire, et les carrés blancs représentent les zéros. La première ligne est le résidu V_{25} ; les 31 premières lignes numérotées de 0 à 30 figurent le carré de V_{25} ; les quatre lignes numérotées 0, 1, 2, 3 au bas de la figure donnent l'addition des unités de chaque colonne, avec les reports ; on a retranché 2, ou l'unité de la deuxième colonne à droite ; enfin la dernière ligne est le résidu de V_{26}.

La *fig.* 105 contient l'ensemble de tous les résidus de V_1 à V_{30}; la dernière ligne composée entièrement de zéros nous montre que $2^{31}-1$ est premier.

Pour la vérification des nombres de Mersenne de la forme $2^{4q+3}-1$, on calcule de la même manière la série

$$4,\quad 14,\quad 194,\quad 37634,\quad \ldots .$$

Fig. 105.



On a encore ce théorème wilsonien :

Pour que $p = 2^{4nq+2n+1}-1$ *soit premier, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\left(2^n+\sqrt{2^{2n}+1}\right)^{\frac{p+1}{2}} + \left(2^n-\sqrt{2^{2n}+1}\right)^{\frac{p+1}{2}} \equiv 0, \ (\text{mod. } p).$$

Fermat avait cru rencontrer, dans l'expression

$$F_n = 2^{2^n}+1,$$

une formule ne donnant que des nombres premiers. Il écrivait à Mersenne,

le 25 décembre 1640 : « Si je puis une fois tenir la raison fondamentale que

$$3,\quad 5,\quad 7,\quad 17,\quad 257,\quad 65\,537,\quad \ldots$$

sont nombres premiers, il me semble que je trouverai de très belles choses en cette matière, car déjà j'ai trouvé des choses merveilleuses dont je vous ferai part ». Euler a signalé le premier l'inexactitude de la conjecture de Fermat, en faisant voir que F_5 est divisible par 641. Par l'emploi d'une théorie indiquée par Fermat lui-même, Euler avait démontré ce théorème : *Les diviseurs premiers de* $2^{2^q}+1$ *sont de la forme linéaire* $8hq+1$. Dans l'exemple, il suffit d'essayer la division de F_5 par les nombres

$$193,\quad 257,\quad 449,\quad 577,\quad 641,$$

et l'on trouve avec Euler

$$F_5 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Nous avons démontré (*Académie de Turin*, 27 janvier 1878), que les *diviseurs premiers de* $2^{2^q}+1$ *sont de la forme* $16hq+1$. L'emploi de ce théorème simplifie, de plus de moitié, la recherche des diviseurs, et ainsi dans l'exemple, il est inutile d'essayer la division avec Euler et avec M. Tchebychef (¹), par les quatre premiers nombres 193, 257, 449 et 577.

De même, le premier diviseur qui se présente pour F_{12} est $7.2^{14}+1$ ou 114 689; l'essai réussit et l'on en conclut que F_{12} n'est pas premier. De même encore, le premier diviseur à essayer pour F_{23} est $5.2^{25}+1$ ou 167 772 161, et M. Pervouchine, pope du gouvernement de Perm, a vérifié que le nombre F_{23}, qui est formé de 2 525 223 chiffres est encore un nombre composé. Tous ces résultats se vérifient en peu de temps, en calculant par congruences.

Pour reconnaître si un nombre F_n est premier, on forme la série des résidus

$$6,\quad 34,\quad 1154,\quad \ldots,$$

tels que chacun d'eux est égal au carré du précédent moins deux, en supprimant les multiples de F_n ; pour que F_n soit premier, il faut que le résidu de rang 2^n-1 soit nul. Nous avons fait le calcul pour $n=6$, et reconnu par ce moyen que le nombre $2^{64}+1$, de vingt chiffres, est composé (*Journal de Sylvester*, T. II, p. 238). En profitant de cette assertion

(¹) Tchebychef. *Théorie des nombres*, (en langue russe, p. 182). — Saint-Pétersbourg, 1849. — Lebesgue. *Exercices d'Analyse numérique*. p. 94. — Paris, 1859.



et de la simplification que nous avons indiquée ci-dessus, pour la recherche des diviseurs, M. Landry a obtenu, à l'âge de 82 ans, après un labeur de plusieurs mois, le résultat suivant

$$2^{64} + 1 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721,$$

que l'on peut vérifier maintenant en quelques minutes. D'ailleurs, MM. Landry et Le Lasseur ont démontré, séparément, que le second facteur est un nombre premier.

Nous ajouterons que, pour modifier la conjecture de Fermat, on a énoncé cette proposition : « Tous les nombres de la suite

$$2+1,\quad 2^{2}+1,\quad 2^{2^{2}}+1,\quad 2^{2^{2^{2}}}+1,\quad 2^{2^{2^{2^{2}}}}+1,\quad \ldots,$$

sont premiers. »

D'autre part, Eisenstein a énoncé ce théorème dont il possédait peut-être la démonstration : « *Il y a une infinité de nombres premiers de la forme* $2^{2^n}+1$; » on ne connaît actuellement aucune démonstration de ces deux propositions encore inaccessibles.



NOTE III.

Sur la quadrature du cercle.

Nous avons vu (p. 156) qu'il est impossible d'obtenir par des constructions géométriques le côté d'un carré équivalent à un cercle de rayon donné, ou une droite de longueur égale à la circonférence. Cependant, dans la pratique, il est utile de savoir rectifier la circonférence, c'est-à-dire de déterminer par des constructions géométriques une droite de longueur approximativement égale à la circonférence.

Nous donnons ici un procédé très simple, peu connu, et d'une fort grande approximation; il a été indiqué par Specht dans le *Journal de Crelle* (T. III, p. 83). Soit OA le rayon d'une circonférence de centre O; on mène une tangente perpendiculaire AB, et l'on prend sur cette droite des longueurs AB, BC, CD respectivement égales au double, au cinquième, et aux deux cinquièmes du rayon. On tire les droites OC, OD, et l'on prend sur la droite AO, dans le sens AO, une longueur AE égale à OC. Enfin, on mène par le point E une parallèle à OD, jusqu'à son intersection F avec

AB. La droite AF est, avec une grande approximation, égale à la circonférence.

En effet, en supposant le rayon égal à l'unité, on a

$$\mathrm{OC} = \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{AE} = \frac{\sqrt{146}}{5};$$

d'autre part,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}, \quad \text{d'où } \mathrm{AF} = \mathrm{AE} \times \frac{13}{5};$$

et enfin

$$\mathrm{AF} = 2 \times 3,1415919.$$

La différence de $\frac{1}{2}$ AF avec π est plus petite que 0,0000007, par conséquent, pour une circonférence de 7000^{km} de rayon (le rayon de la Terre est de 6366^{km}), l'erreur commise sur la circonférence n'atteint pas un mètre.

Specht a donné une autre solution encore plus approchée, mais beaucoup moins simple.



NOTE IV.

Sur le calcul icosien.

M. Laisant, qui a contribué, pour la plus grande part, à la vulgarisation en France de la théorie des Equipollences de Bellavitis et de la théorie des Quaternions, a bien voulu nous adresser un résumé de la théorie du jeu icosien, d'après le travail d'Hamilton : *Memorandum respecting a New System of Roots of Unity*, qui a été publié dans le *Philosophical Magazine* de décembre 1856.

« J'ai été conduit dernièrement, dit l'auteur, à la conception d'un nouveau système, ou plutôt d'une *famille de systèmes*, de *racines de l'unité non commutatives*, entièrement distinctes des symboles i, j, k des quaternions, bien qu'ayant avec ceux-ci une certaine analogie générale, et qui se prêtent, mieux même que ne le font les symboles des quaternions, à une interprétation géométrique.

« Dans le système qui semble être le plus intéressant parmi ceux qui

sont contenus dans cette nouvelle famille, je suppose trois symboles ι, $\varkappa$, λ, tels que

$$\iota^2 = 1, \quad \varkappa^3 = 1, \quad \lambda^5 = 1, \quad \lambda = \iota\varkappa;$$

mais $\iota\varkappa$ doit être *distingué* de $\varkappa\iota$, car sans cela nous aurions $\lambda^6 = 1$, $\lambda = 1$.

« Comme *exemple* très simple des conclusions symboliques déduites de ces suppositions fondamentales, je puis mentionner que, si nous faisons

$$\mu = \iota\varkappa^2 = \lambda\iota\lambda,$$

nous aurons ainsi

$$\mu^5 = 1, \quad \lambda = \mu\iota\mu;$$

de telle sorte que μ est une nouvelle racine cinquième de l'unité, liée avec la précédente racine cinquième λ par des relations de complète réciprocité. On pourrait trouver une longue suite de telles déductions symboliques ; et chacun de ces résultats peut être *interprété* comme se rapportant au passage de *face à face* (ou de sommet à sommet) de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre) : c'est pour ce motif que je me propose de donner le nom de « calcul icosien » à ce nouveau système de symboles, et aux règles de leurs opérations. »

II. — Dans un document lithographié, qui fut distribué à la section A de l'Association britannique, pendant son congrès à Dublin en 1857, Hamilton a mentionné quelques autres résultats symboliques de la même nature; il a donné les équations

$$\lambda\mu^2\lambda=\mu\lambda\mu, \quad \mu\lambda^2\mu=\lambda\mu\lambda, \quad \lambda\mu^3\lambda=\mu^2, \quad \mu\lambda^3\mu=\lambda^2,$$

et la formule

$$[\lambda^3\mu^3(\lambda\mu)^3]^2 = 1,$$

qui sert, comme un *type mathématique commun,* à la solution de *tous les les cas* du premier problème du jeu icosien. Il a aussi donné une indication orale (et jusqu'à présent inédite) sur les règles *d'interprétation* des principaux symboles. Ces règles, par rapport au présent diagramme icosien peuvent être brièvement énoncées comme il suit :

1°. — L'opération ι *renverse* (ou retourne bout pour bout) une *ligne* de la figure; elle change, par exemple, BC en CB (*fig.* 97).

2°. — L'opération $\varkappa$ fait *tourner* une ligne dans une direction particulière, autour de son extrémité finale ; elle change, par exemple, BC en DC.

3°. — L'opération λ change une ligne considérée comme un *côté* d'un pentagone, en le *côté suivant,* en marchant toujours *à main droite,* pour

tout pentagone, excepté pour le plus grand (ou extérieur) ; ainsi λ change BC en CD, mais SR en RW.

4°. — L'opération μ est *contraire* de λ, et change une ligne considérée comme un côté d'un *autre pentagone*, et considérée dans l'*ordre opposé* de rotation, en le côté consécutif de cet *autre* pentagone ; ainsi μ change BC en CP et SR en RQ ; mais il change aussi RS en ST, tandis que λ aurait changé RS en SN.

5°. — Les seules opérations employées dans le jeu sont celles qui sont indiquées par λ et μ ; mais une autre opération $\omega = \lambda\mu\lambda\mu\lambda = \mu\lambda\mu\lambda\mu$, ayant la propriété que $\omega^2 = 1$, a été aussi mentionnée dans le document lithographié dont il a été question ci-dessus ; et, pour compléter le système actuel d'*interprétations*, on peut ajouter que l'effet de cette opération ω est de changer une *arête* du dodécaèdre pentagonal en l'*arête opposée* de ce solide ; par exemple (*fig.* 97), BC en TV.



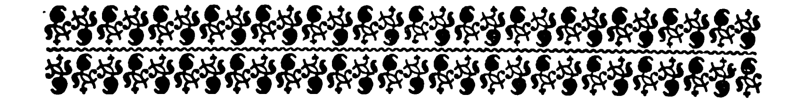


TABLE DES MATIÈRES.

Première Récréation. — *Au jeu de dames, qui perd gagne.*



DEUXIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu de dominos.*



TROISIÈME RÉCRÉATION. — *Les jeux de marelle.*



QUATRIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu de parquet.*

CINQUIÈME RÉCRÉATION. — *Les jeux de casse-tête.*



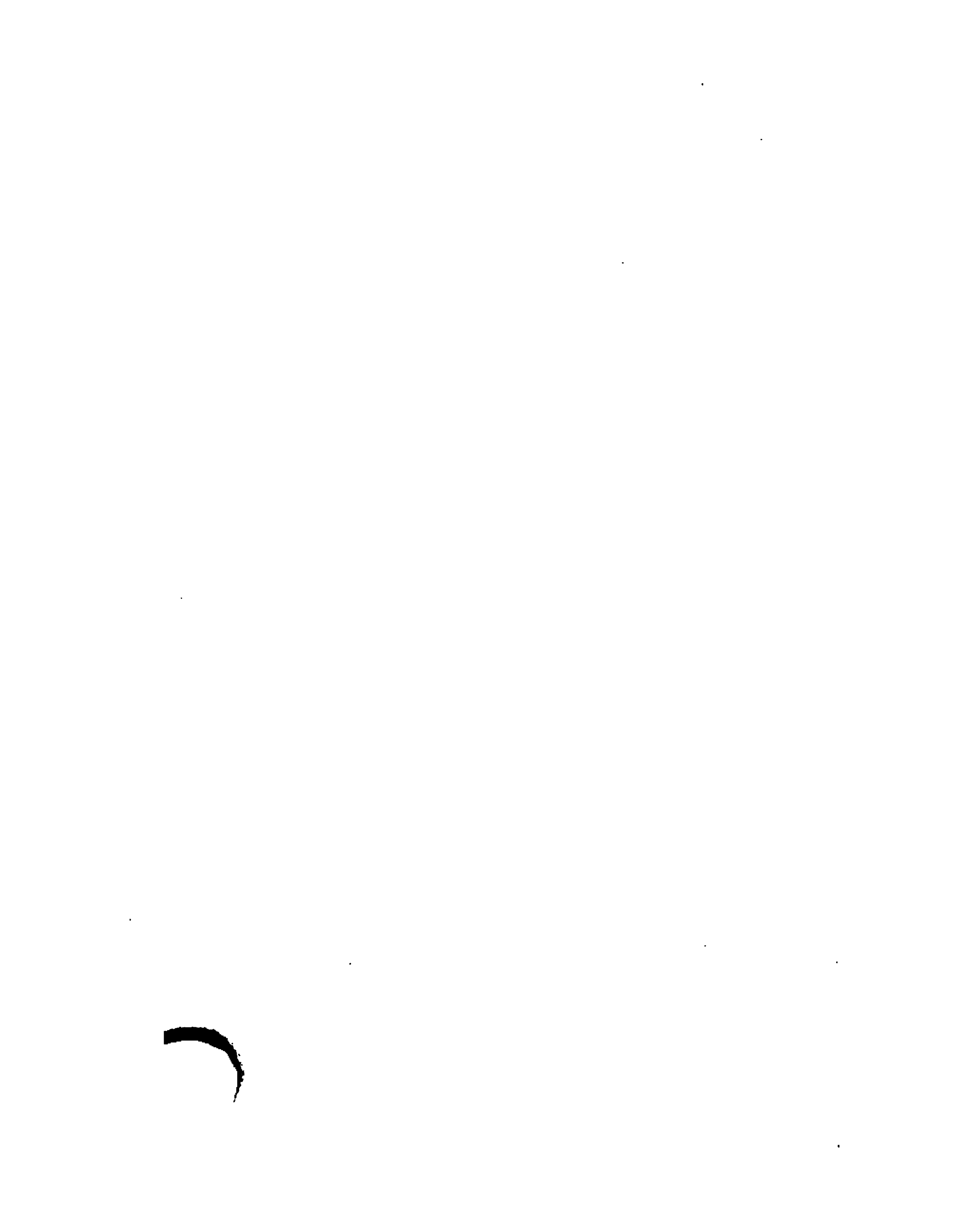
SIXIÈME RÉCRÉATION. — *Les jeux de demoiselles.*

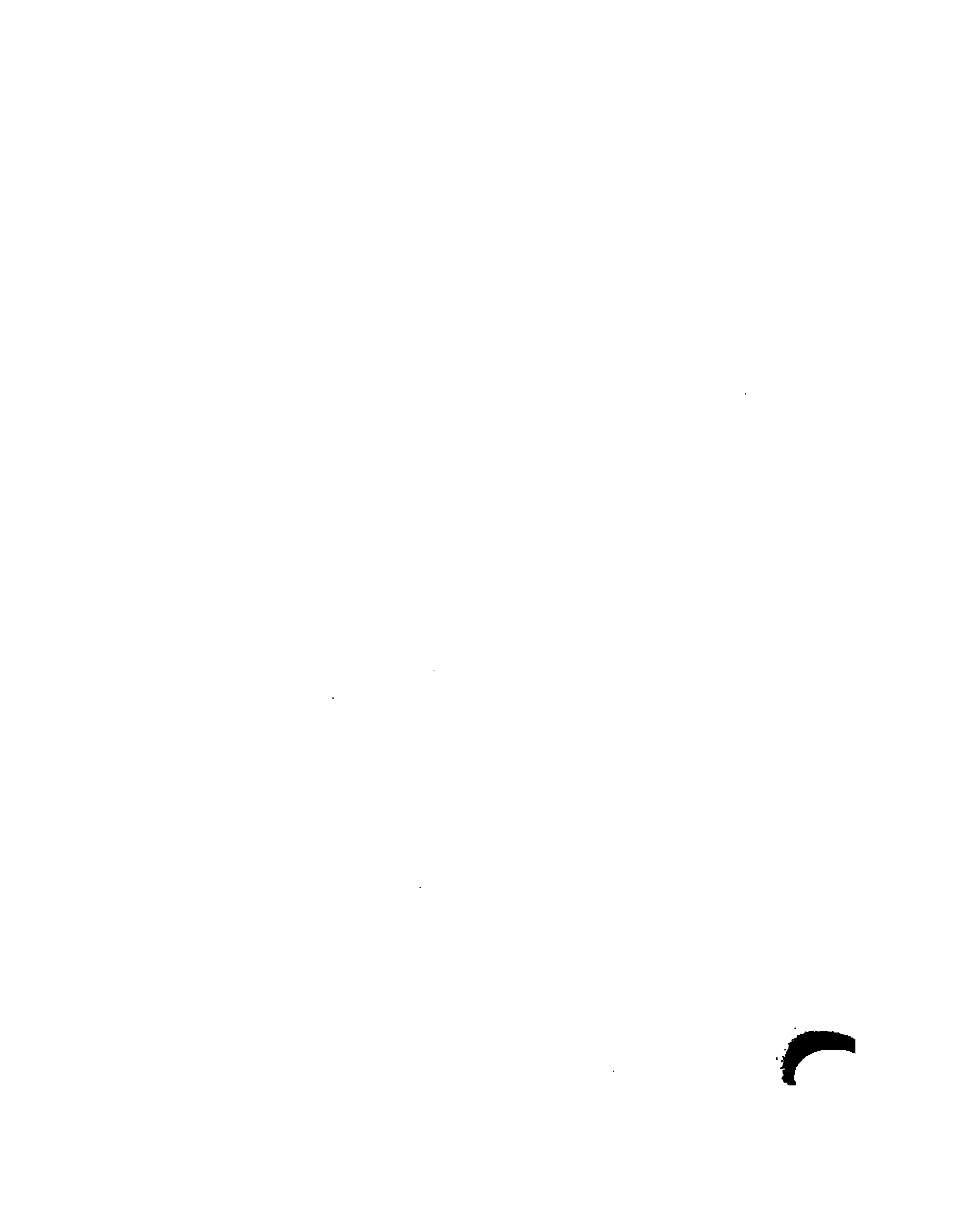


SEPTIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu d'Hamilton.*




LABORA ET NOLI
CONTRISTARI










[redacted]
510.99
L933
ed.2
v.2
QA95
L95
v.2
99119
JUL 2 1970

